

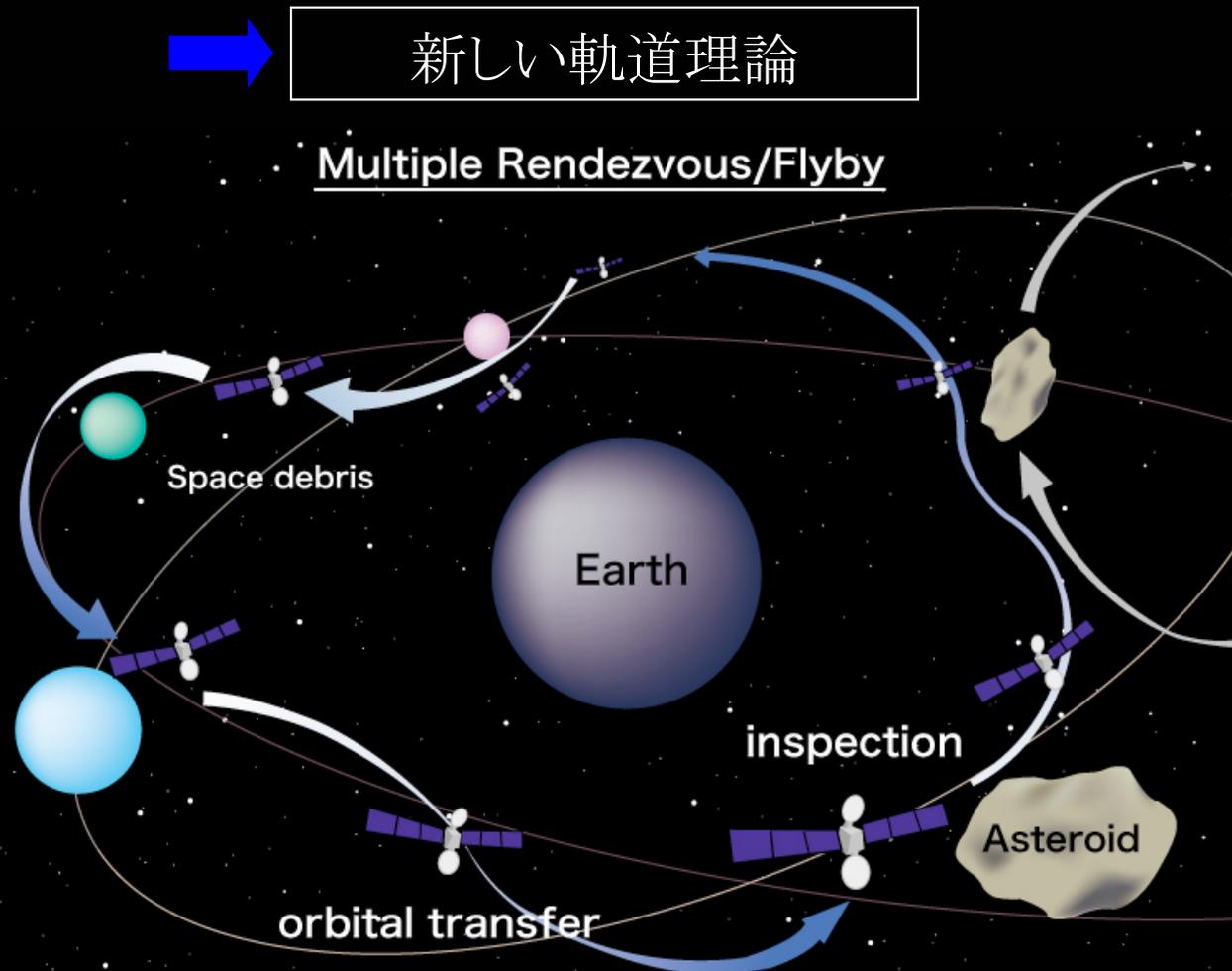
惑星間航行・地球周回編隊飛行のための 最適軌道制御理論の構築

京都大学生存圏研究所 ミッション専攻研究員
坂東 麻衣

1. スペースデブリ・地球接近小惑星探査に関する多数回ランデブーのための軌道計画
 2. 燃料消費の少ないフォーメーションフライトや軌道間遷移に関する基礎理論
-

はじめに

- 地球接近小惑星やスペースデブリを観測するための軌道設計を行うためには、従来の軌道理論では燃料消費の意味で最適な軌道を設計することが難しい。



はじめに

- 新しい軌道理論
 - 非線形性を直接考慮し, 最適軌道を求める理論
- 複数の対象へのフライバイ軌道最適化
 - 地球接近小惑星(Near Earth Asteroids)や地球に接近して衝突する可能性のある小惑星(Potentially Hazardous Asteroids, PHA)などを複数の対象を観測するための軌道計画

直接, 運動方程式から最適な軌道を決定



軌道を生成する母関数を決定

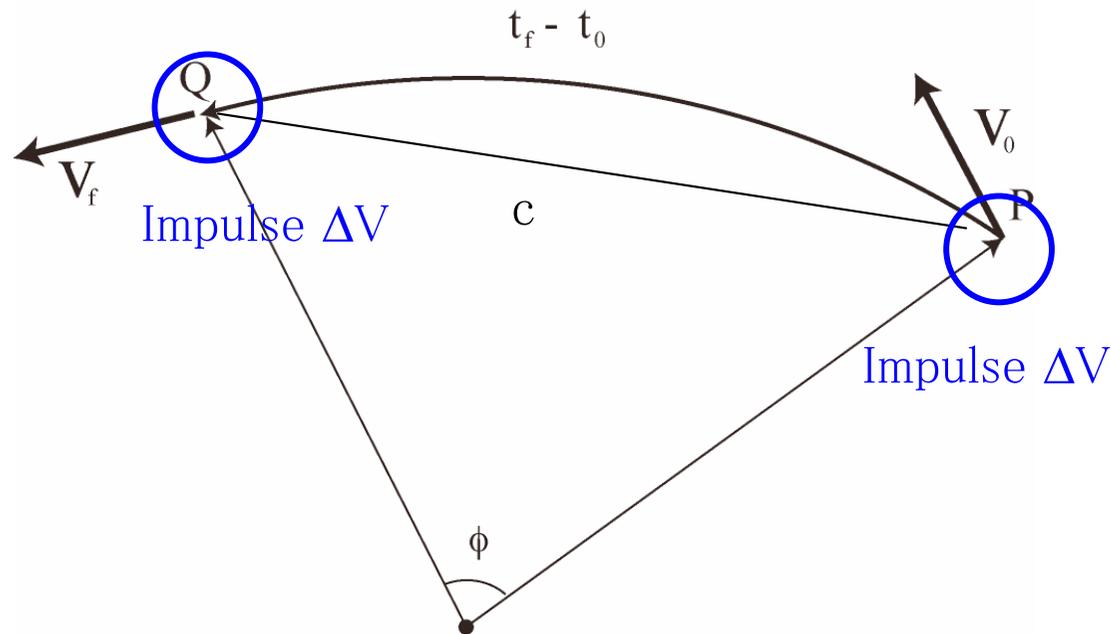
非線形ダイナミクスを直接扱い, 3体問題, 摂動ポテンシャルなど様々な問題へもポテンシャル関数の形を変えることでそのまま適用できる.

膨大な情報を効率よく扱うための軌道理論

Orbital Control Theory

- Classical Approach

- Lambert's Problem
 - Transfer of a spacecraft from one point to another



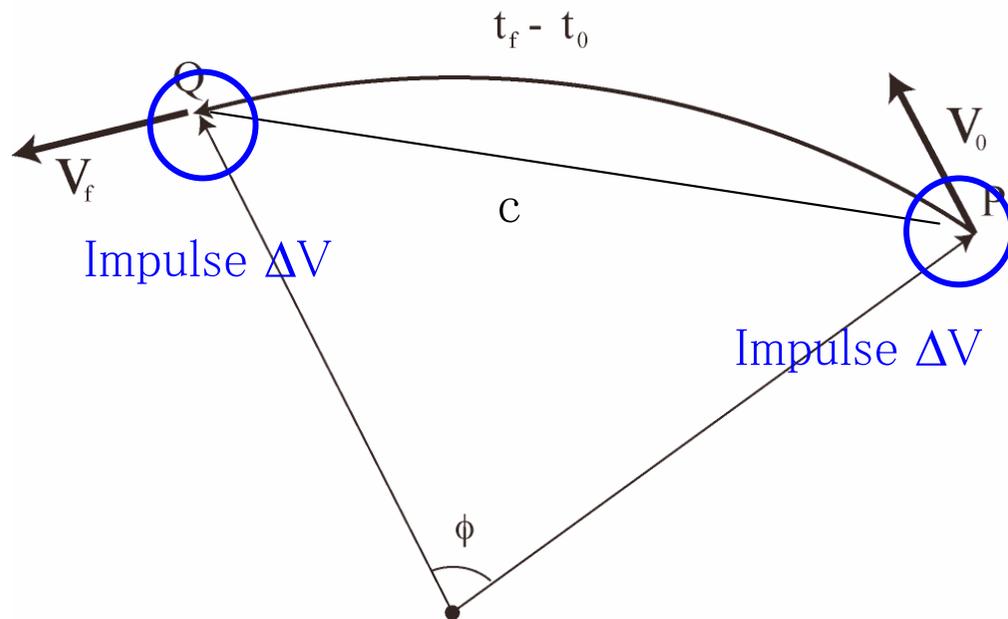
決められた時間でPからQへ移動するために必要な速度を求めよ.

Orbital Control Theory

- Classical Approach

Two-point boundary value problem for Keplerian motion

- Classical approach



Lambert's equation

$$\sqrt{\mu}(t_2 - t_1) = a^{\frac{3}{2}}[\alpha - \beta - (\sin \alpha - \sin \beta)],$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \left(\frac{s}{2a}\right)^{1/2},$$

$$\sin \frac{\beta}{2} = \left(\frac{s - c}{2a}\right)^{1/2},$$

$$s = (r_1 + r_2 + c)/2,$$

Lambert方程式を解くことにより、必要な速度を求めることができるが、終端位置、初期位置が変わるたびに解き直す必要がある。

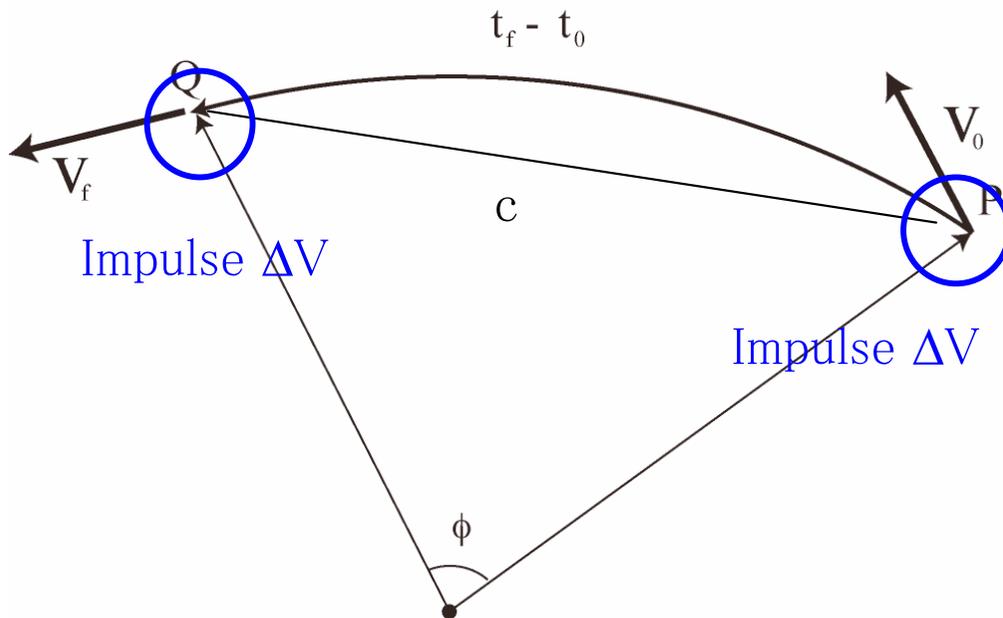
ダイナミクスが変わると解くことができない。

Lambert's Problem

- Direct Approach

Two-point boundary value problem for Keplerian motion

- Direct approach (Bando and Yamakawa, 2010)



Hamilton-Jacobi equation

$$\frac{\partial V^*}{\partial t} + \frac{\partial V^{*T}}{\partial x} f + R(x) - \frac{1}{2} \frac{\partial V^{*T}}{\partial x} g(x) g(x)^T \frac{\partial V^*}{\partial x} = 0.$$

$$u^* = -g(x)^T \frac{\partial V^*}{\partial x}$$

Initial and final velocity is determined as an optimal control.

作用積分を直接最小化することにより、初速度、終端速度を得る。

Lambert's Problem

- Direct Approach

PからQに飛行時間 $t_f - t_0$ で移動するための速度を求めよ

- Hamiltonの原理: 運動は, 作用積分の停留値として決定される.

$$I[q] = \int_{t_0}^{t_f} L(q, \dot{q}, t) dt$$

- 最適制御問題: 評価関数を最小とする制御入力決定する.

$$J[u] = \int_{t_0}^{t_f} Q(x) + R(u) dt$$
$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

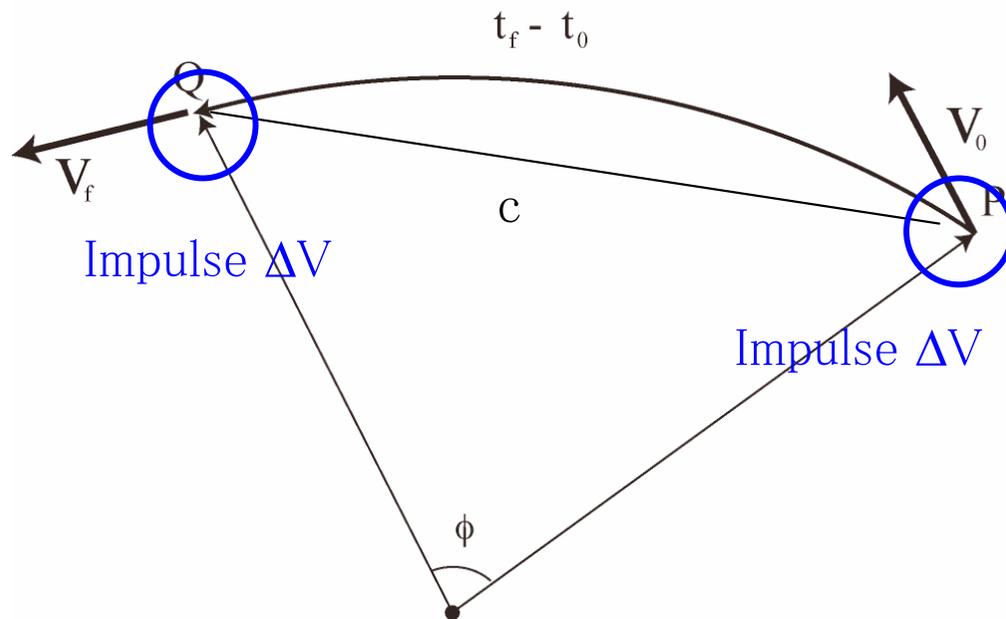
$t_f - t_0$ の間に x_0 から x_f へ移す評価関数を最小にする入力を求めよ

Lambert's Problem

- Direct Approach

Two-point boundary value problem for Keplerian motion

- Direct approach (Bando and Yamakawa, 2010)



Hamilton-Jacobi equation

$$\frac{\partial V^*}{\partial t} + \frac{\partial V^{*T}}{\partial x} f + R(x) - \frac{1}{2} \frac{\partial V^{*T}}{\partial x} g(x) g(x)^T \frac{\partial V^*}{\partial x} = 0.$$

$$u^* = -g(x)^T \frac{\partial V^*}{\partial x}$$

Initial and final velocity is determined as an optimal control.

作用積分を直接最小化することにより、初速度、終端速度を得る。

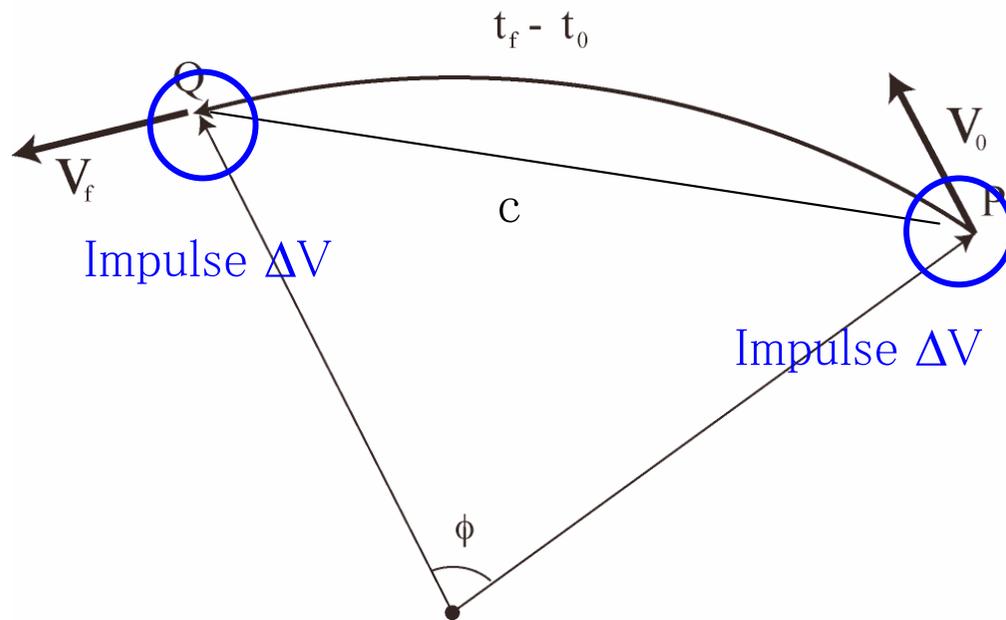
非線形性を直接扱い、3体問題、摂動ポテンシャルなど様々な問題へもポテンシャル関数の形を変えることでそのまま適用できる。

New Orbital Control Theory

- Generating Functions Approach

Two-point boundary value problem for Keplerian motion

- Generating Functions approach (Guibout, Scheeres, 2004)



Hamilton-Jacobi equation

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} + H(\mathbf{q}, \frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{q}}, t) = 0$$

$$\mathbf{p}_f = \frac{\partial F_1(\mathbf{q}_f, \mathbf{q}, t)}{\partial \mathbf{q}_f},$$

$$\mathbf{p}(t) = -\frac{\partial F_1(\mathbf{q}_f, \mathbf{q}, t)}{\partial \mathbf{q}},$$

$F_1(\mathbf{q}_f, \mathbf{q}_0, t_f)$ Generating function

F1母関数は、初期位置、終端位置の関数であるため、関数の評価を行うことで必要な速度が求まる。

New Orbital Control Theory - Generating Functions Approach

Generating Functions Approach (2004, Guibout, Scheeres)

- Canonical transformation
- Local solution about nominal trajectory

Local Solution about nominal trajectory



Global Solution

非線形ダイナミクスに対して直接、母関数を求める手法を提案。

Bando, M. and Yamakawa, H.: A New Optimal Orbit Control for Two-Point Boundary-Value Problem Using Generating Functions, 19th AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting, 09-117, Savannah, Georgia, 2009.

運動方程式

- Newton's equation

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}$$

- Hamilton's equation

$$(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = ([q_1, \dots, q_n]^T, [p_1, \dots, p_n]^T),$$

: canonical variables

- Euler-Lagrangian

$$\mathbf{q} = [q_1, \dots, q_r]$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

$$L = T - V \quad : \text{Lagrangian}$$

- Hamiltonの原理: 運動は, 作用積分の停留値として決定される.

$$I[\mathbf{q}] = \int_{t_0}^{t_f} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt$$

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$$

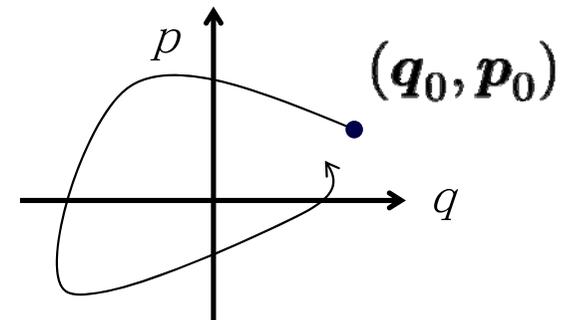
: Hamilton system

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}$$

$H^T \mathbf{p}$: Hamiltonian

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \quad : \text{generalized momentum}$$

- すべての運動方程式は等価.
- 以下ではHamiltonの方程式を用いる.



正準変換

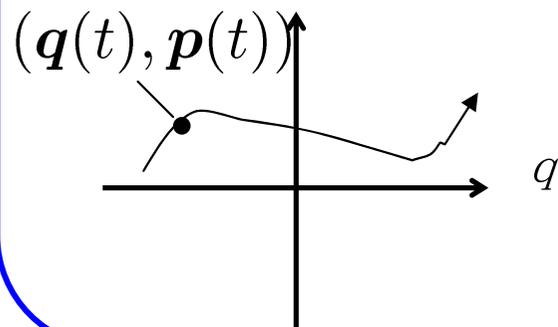
- 2つのハミルトン系の間座標変換

$$(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = ([q_1, \dots, q_n]^T, [p_1, \dots, p_n]^T),$$

$$(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = ([Q_1, \dots, Q_n]^T, [P_1, \dots, P_n]^T)$$

Old variables (q, p)

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial \mathbf{p}}, \\ \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial \mathbf{q}}, \end{cases}$$



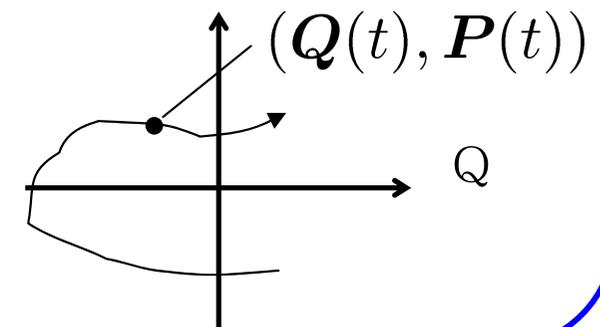
Hamiltonian : H

Transformation equations

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial F_1}{\partial q}, \\ P &= -\frac{\partial F_1}{\partial Q}, \\ \frac{\partial F_1}{\partial t} + H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{q}}, t\right) &= 0 \end{aligned}$$

New variables (Q, P)

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{Q}} = \frac{\partial K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)}{\partial \mathbf{P}}, \\ \dot{\mathbf{P}} = -\frac{\partial K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)}{\partial \mathbf{Q}}, \end{cases}$$



Hamiltonian : K

Lambert問題の解法

V. M. Guibout, D. J. Scheeres, Journal of Guidance, Control, and Dynamics 2004, vol.27 no.4 (693-704)

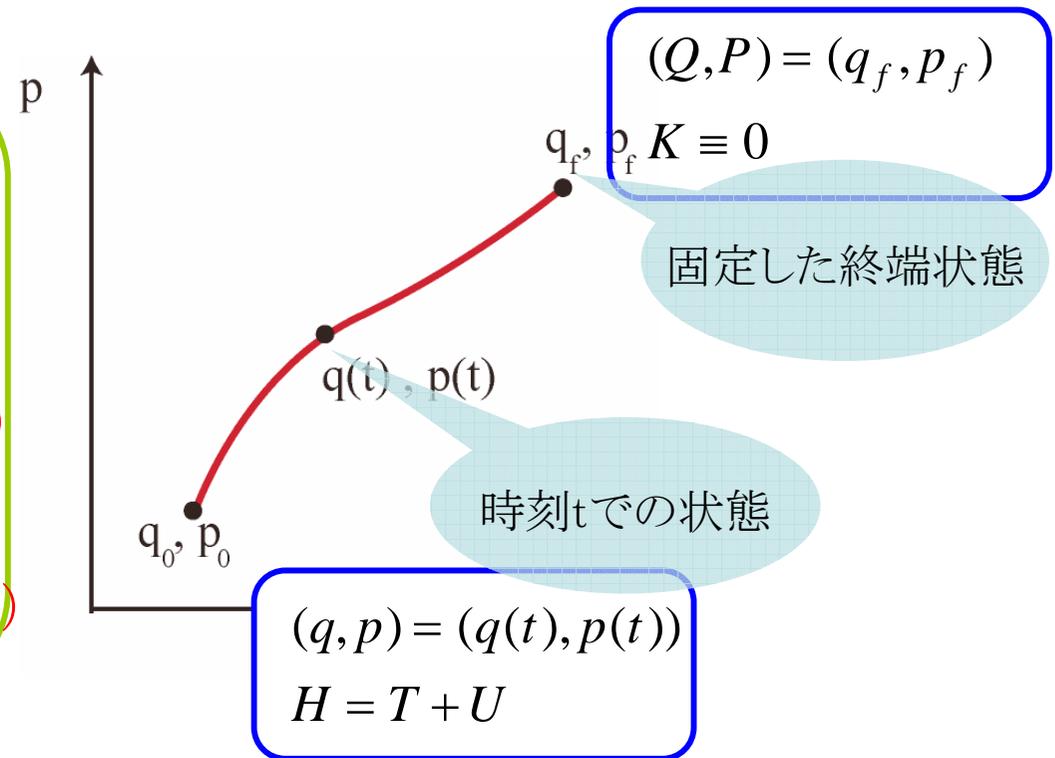
- 固定した終端状態を変数とするハミルトン系への正準変換

Transformation equations

$$\mathbf{p}_f = \frac{\partial F_1(\mathbf{q}_f, \mathbf{q}, t)}{\partial \mathbf{q}_f}, \text{(Final velocity)}$$

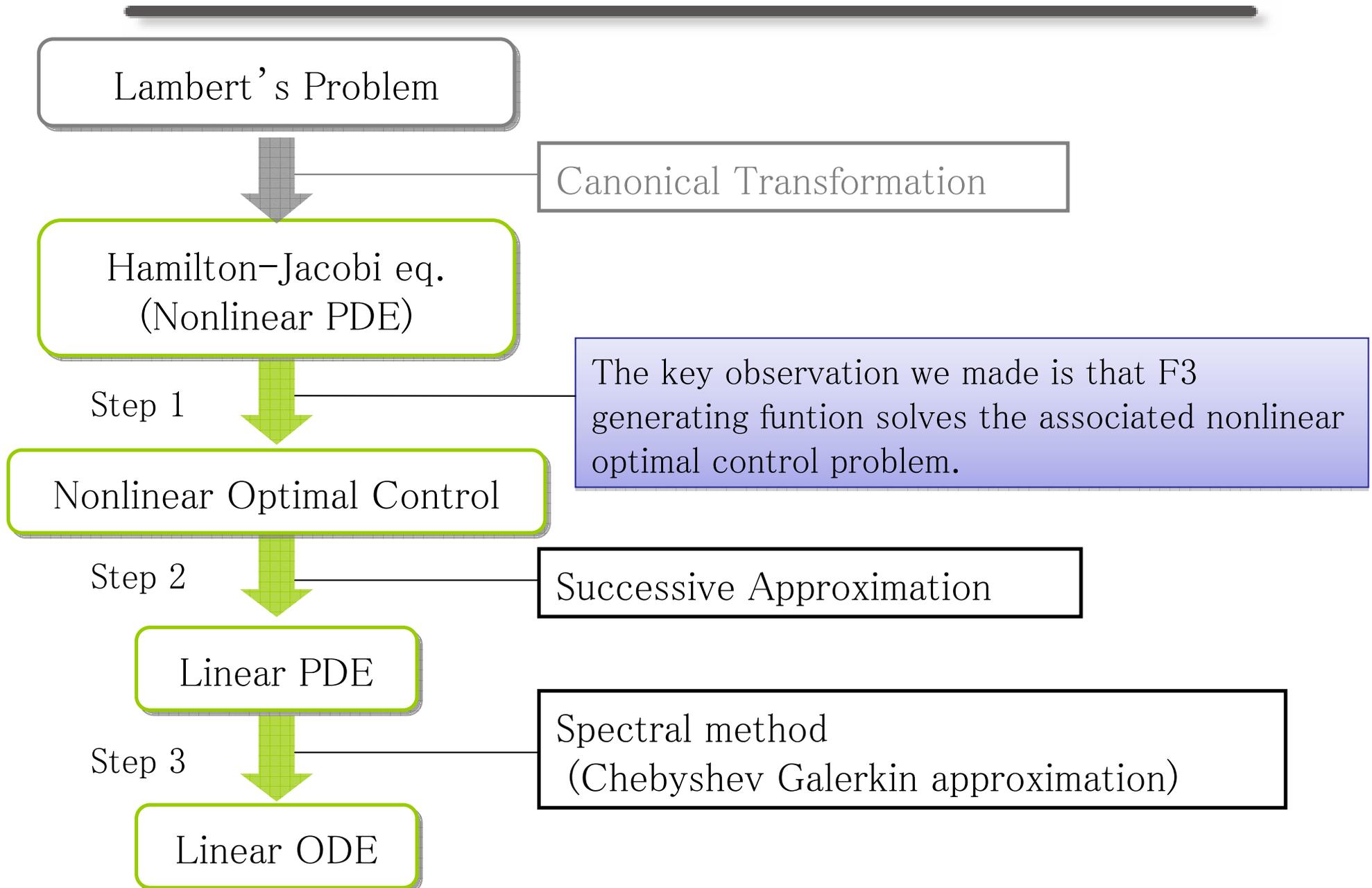
$$\mathbf{p}(t) = -\frac{\partial F_1(\mathbf{q}_f, \mathbf{q}, t)}{\partial \mathbf{q}}, \text{(velocity at t)}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} + H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{q}}, t\right) = 0 \text{(HJ equation)}$$



- F1母関数により初期速度, 終端速度が初期値, 終端位置の関数として得られる.

Proposed Method



4 types of Generating Functions

$$F_1 = F_1(q_f, q, t) \quad F_2 = F_2(q_f, p, t) \quad F_3 = F_3(p_f, q, t) \quad F_4 = F_4(p_f, p, t)$$

HJ equation

Boundary condition

$$-\frac{\partial F_1}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial F_1}{\partial x}, t\right) = 0$$

—————

$$-\frac{\partial F_2}{\partial t} + H\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}, p, t\right) = 0$$

$$F_2(q_f, p, t_f) = q_f^T p$$

$$-\frac{\partial F_3}{\partial t} + H\left(q, -\frac{\partial F_3}{\partial x}, t\right) = 0$$

$$F_3(p_f, q, t_f) = -p_f^T q$$

$$-\frac{\partial F_4}{\partial t} + H\left(-\frac{\partial F_4}{\partial x}, p, t\right) = 0$$

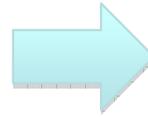
—————

- F1, F4母関数は終端時刻($t=t_f$)で特異となるが, F2, F3母関数は恒等変換となり, 境界条件をもつ.

Hamilton-Jacobi equation for F3-generating function

- F3母関数のHamilton-Jacobi方程式

母関数のみたす偏微分方程式



評価関数を最小化する問題

Hamilton-Jacobi方程式

$$H(q, p) = \frac{1}{2}p^2 + U(q)$$

運動エネルギー+ポテンシャルエネルギー

$$\frac{\partial F_3}{\partial t} + \min_{\lambda} \left[\frac{\partial F_3}{\partial q} \lambda + \frac{1}{2} \lambda^2 - U(q) \right] = 0$$
$$\iff \frac{\partial F_3}{\partial t} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F_3}{\partial q} \right)^2 - U(q) = 0$$

最適制御問題

システム $\dot{x} = f(x) + Bu,$

$$x = \begin{bmatrix} p_f \\ q \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix}$$

評価関数 $f(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$J(u; x_0) = \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} \|u\|^2 - U(q) dt - p_f q$$

Lagrangian

- F3, F4母関数は作用積分を評価関数を最小化するpを求める最適化問題とみなすことができる。

Successive Approximation

Saridis, G. N. and Lee, C.-S. G., IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics 1979, vol.9 no.3 (152-159)

- 逐次近似の評価関数

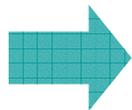
$$J^{(k)}(\mathbf{u}^{(k)}; \mathbf{x}_0) = \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} \|\mathbf{u}^{(k)}(t)\|^2 + L(\mathbf{x}) dt + g(\mathbf{x}(t_f))$$

GHJB: $\frac{\partial V^{(k)}}{\partial t} + \frac{\partial V^{(k)}}{\partial x} (f + B\mathbf{u}^{(k)}) + L(x) + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}^{(k)}\|^2 = 0 \quad \leftarrow \text{Linear PDE}$

$$\mathbf{u}^{(k)} = -B^T \frac{\partial V^{(k-1)}}{\partial x}$$

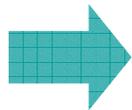
[successive approximation]

1. For $k = 0$, define $\mathbf{u}^{(0)}$.
2. Solve GHJB eq. to compute $V^{(k)}$.
3. Update $\mathbf{u}^{(k)}$ by $\mathbf{u}^{(k+1)} = -B^T \frac{\partial V^{(k)}}{\partial x}$.
4. Set $k = k + 1$ and repeat Step 2 and 3.



$$J^{(k)}(\mathbf{u}^{(k+1)}) \geq J^{(k+1)}(\mathbf{u}^{(k)})$$

$$k \rightarrow \infty$$



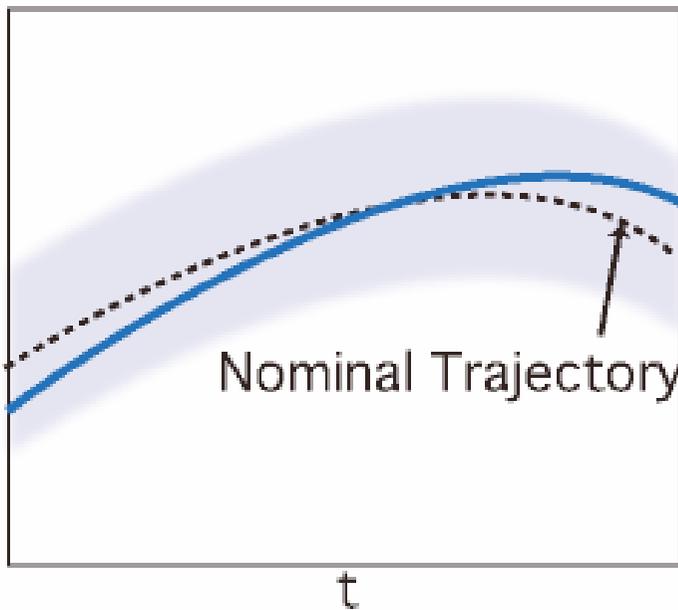
HJB: $\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f + L(x) - \frac{1}{4} \frac{\partial V}{\partial x} B B^T \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad \leftarrow \text{Nonlinear PDE}$

- ハミルトニアンが力学的エネルギーで表される場合、逐次近似により最適解への収束性が保証される。

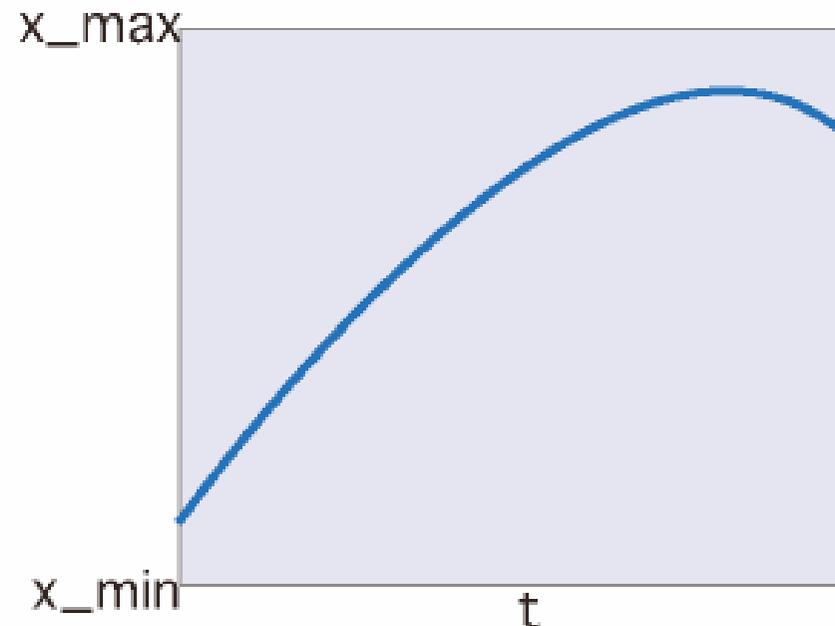
Spectral Method

- The spectral method is based on the idea to assume the solution can be approximated by a sum of $N+1$ basis functions.

Region of convergence



Taylor series solution



Spectral method

- In the limit $N \rightarrow \infty$, the approximation must converge exponentially fast to the exact solution.
- By using spectral method we can obtain the solution in the arbitrary region. And approximation error is expect to be uniform in the region.

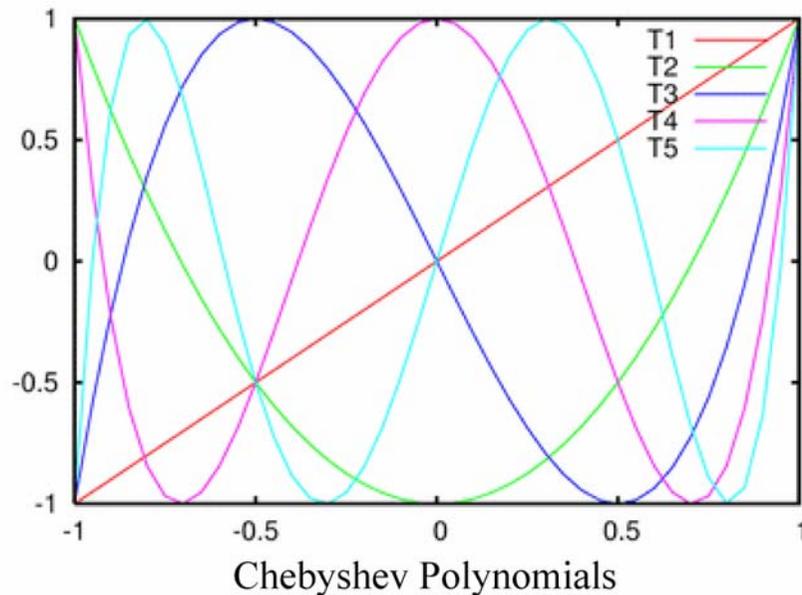
Chebyshev Polynomials

- n-th order Chebyshev polynomial

$$\cos n\theta \triangleq T_n(\cos \theta) = T_n(x), \quad x = \cos \theta$$

- The Chebyshev polynomials form a complete orthogonal system on the interval $[-1, 1]$ with respect to the the weighting function.

$$\langle f, g \rangle \triangleq \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)g(x)dx$$



$$T_0(x) = 1,$$

$$T_1(x) = x,$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1,$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x,$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1,$$

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x,$$

Proposed Method

Lambert's Problem

Step 3

Linear ODE

Generating Function F

$$F_1(q_f, q, T)$$

$$F_2(q_f, p, T)$$

$$F_3(p_f, q, T)$$

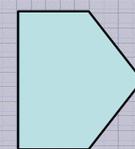
$$F_4(p_f, p, T)$$

$$F_3(p_f, q, T)$$

終端速度 p_f と初期位置 q_0 の関数

$$p_0 = \frac{\partial F_3}{\partial q}(p_f, q_0, T)$$

$$q_f = \frac{\partial F_3}{\partial p_f}(p_f, q_0, T)$$



$$p_0 = p_0(p_f, q_0, T)$$

$$q_f = q_f(p_f, q_0, T)$$

初速度, 終端位置を関数として表すことができる。

Simulation: 1-dimensional problem

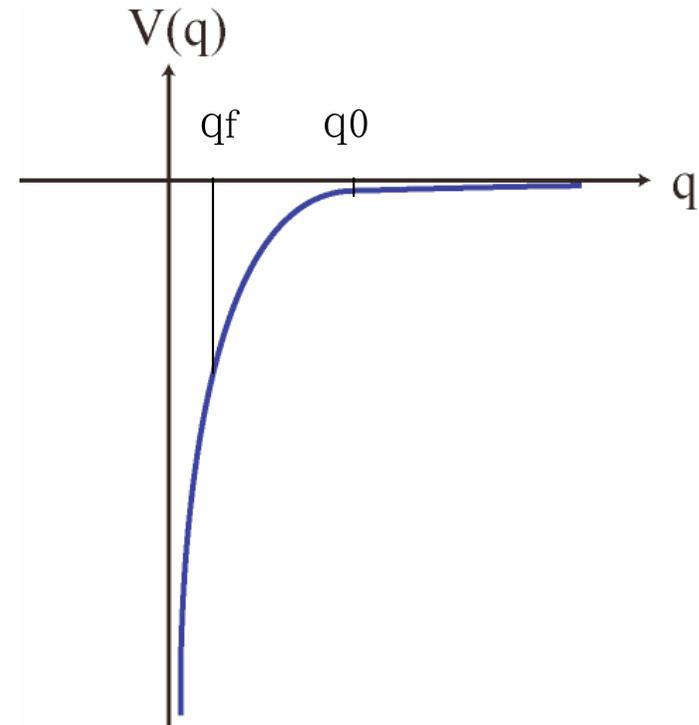
- Consider 1-dimensional motion described by Hamiltonian

$$H(q, p, t) = \frac{p^2}{2} - \frac{1}{q}$$

- The equations of motion

$$\dot{q} = p, \quad \dot{p} = -\frac{1}{q^2}$$

- We solve two-point boundary-value problem by finding F_3 generating function.



$$q_f = -\frac{\partial F_3}{\partial p_f}, \text{ (Final position)}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial t} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F_3}{\partial q} \right)^2 - U(q) = 0 \text{ (HJ eq.)}$$

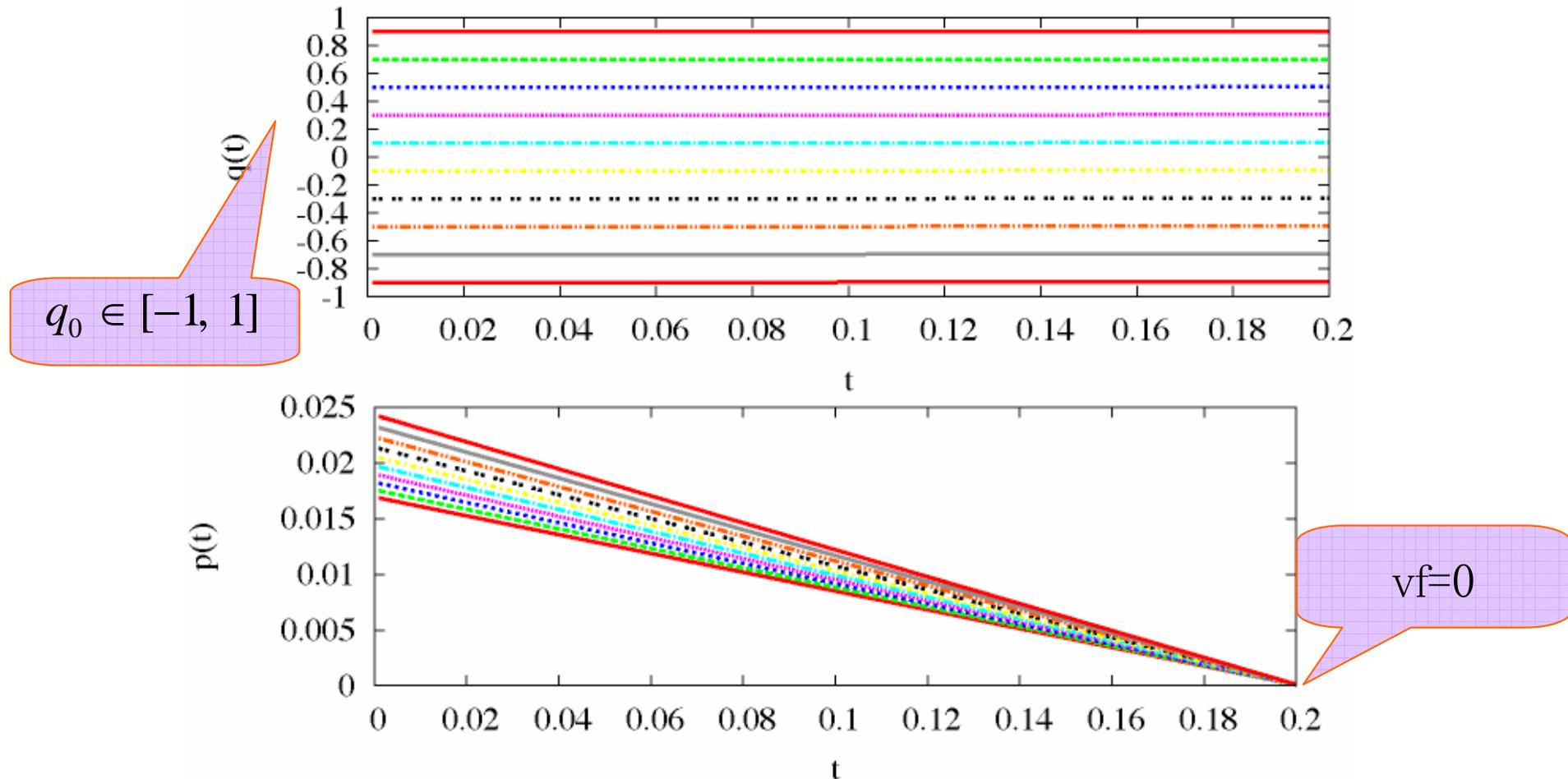
$$p = -\frac{\partial F_3}{\partial q}, \text{ (initial momentum)}$$

$$\frac{\partial F_3^{(k)}}{\partial t} + \frac{\partial F_3^{(k)}}{\partial q} p^{(k)} + \frac{\|p^{(k)}\|^2}{2} + \frac{1}{q} = 0$$

(GHJB eq.)

$F_3(q, p_f)$ for 1-dimensional motion

- $F_3(p_f, q, T)$ から求めた軌道

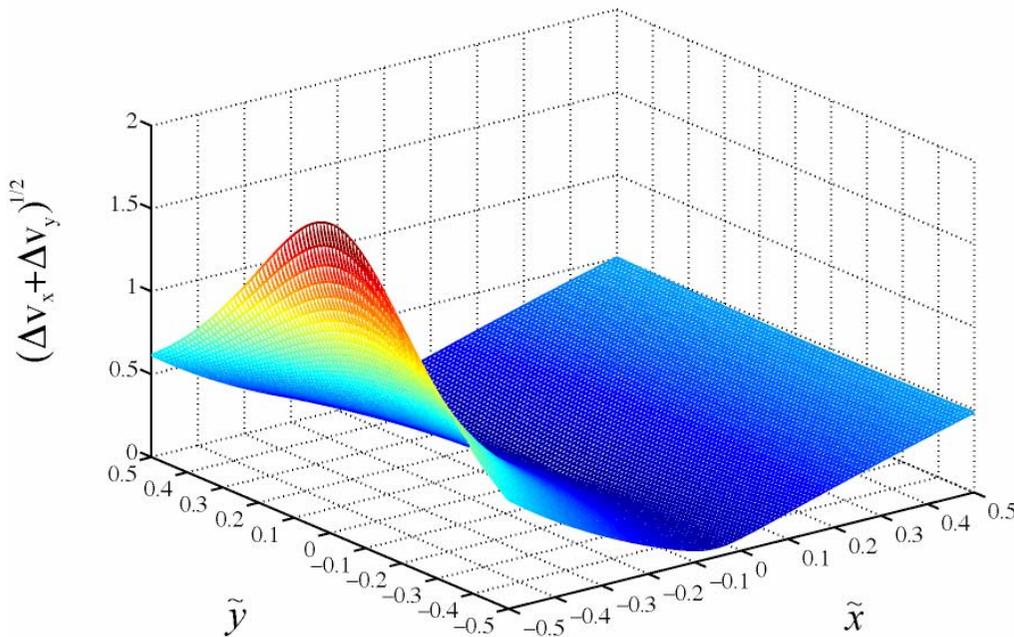


- 境界条件 (終端速度 $v_f=0$) を満たすすべての軌道が, ひとつの母関数 $F_3(p_f, q, T)$ から求めることができた.

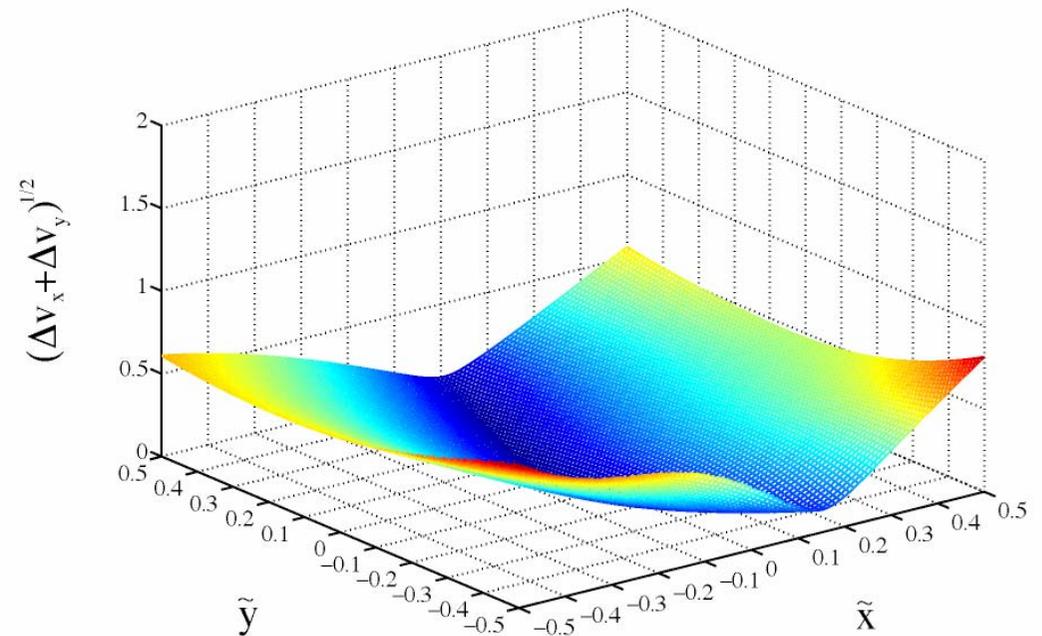
Ex) F3(q,pf) for 2-dimensional motion

- ・ 終端状態での速度誤差

$$(\mathbf{p}_f, \mathbf{q}) = (0, 0, \tilde{x}, \tilde{y}), \quad \tilde{x}, \tilde{y} \in [-0.5, 0.5], t_f = 0.3$$



Taylor series solution about circular nominal trajectory.

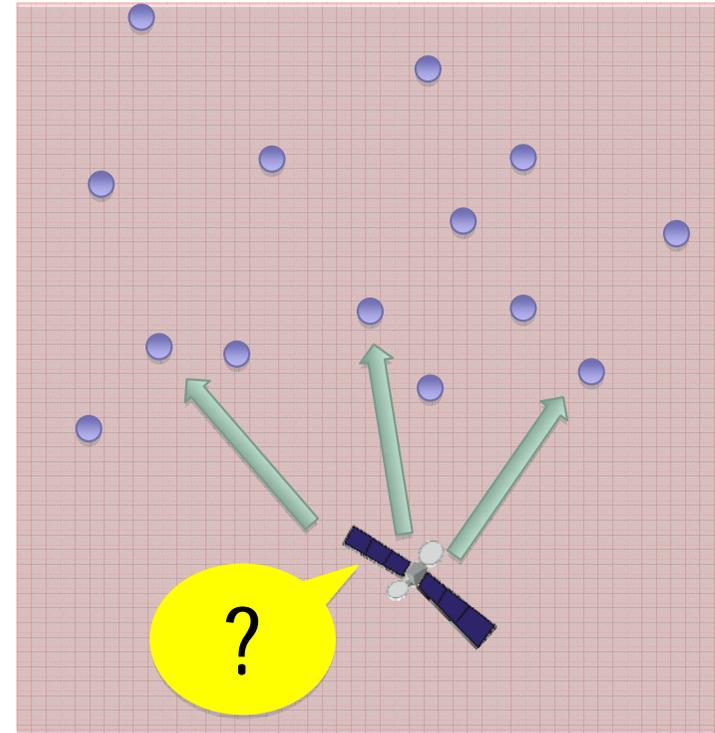
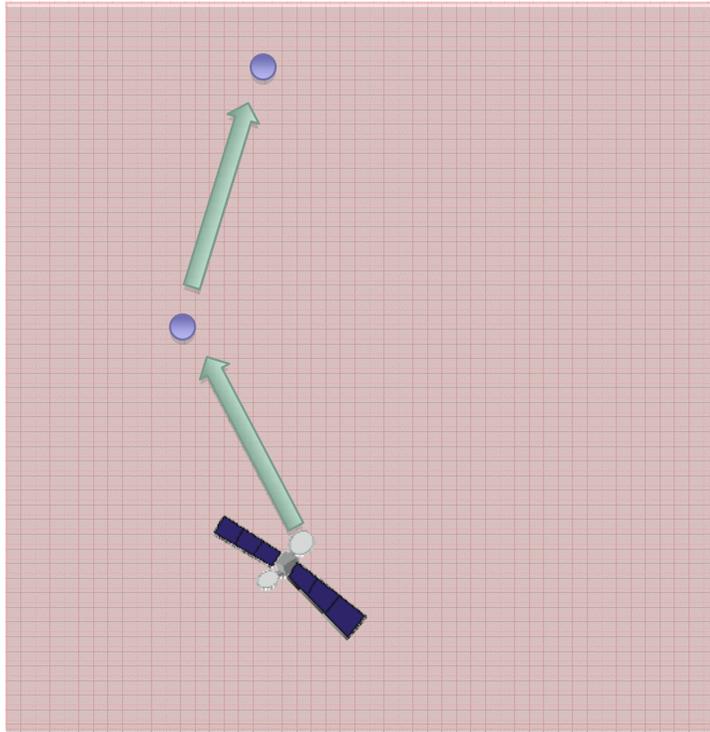


Proposed method with Chebyshev polynomials with $N=2$.

- ・ 提案手法ではよりより広い領域で有効な解が得られた。

Multiple Flyby Design

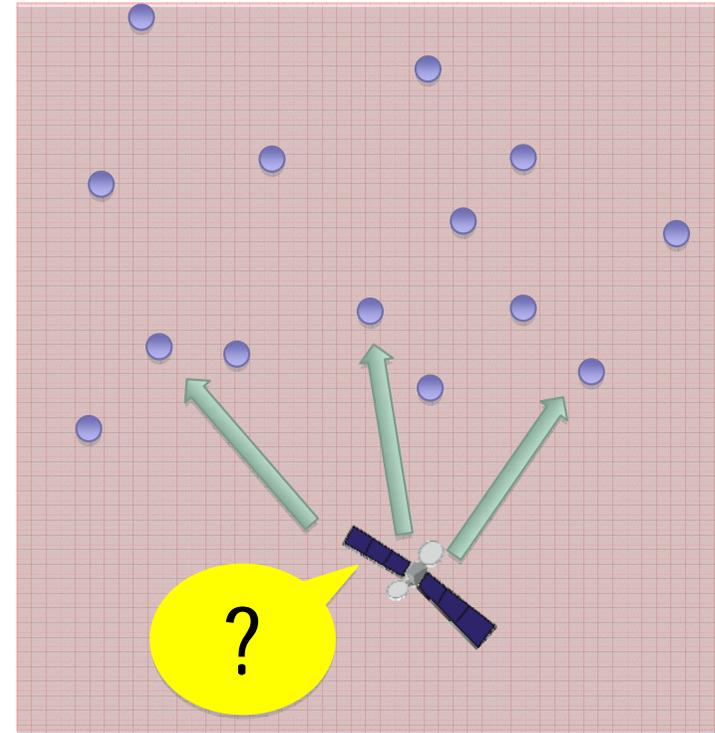
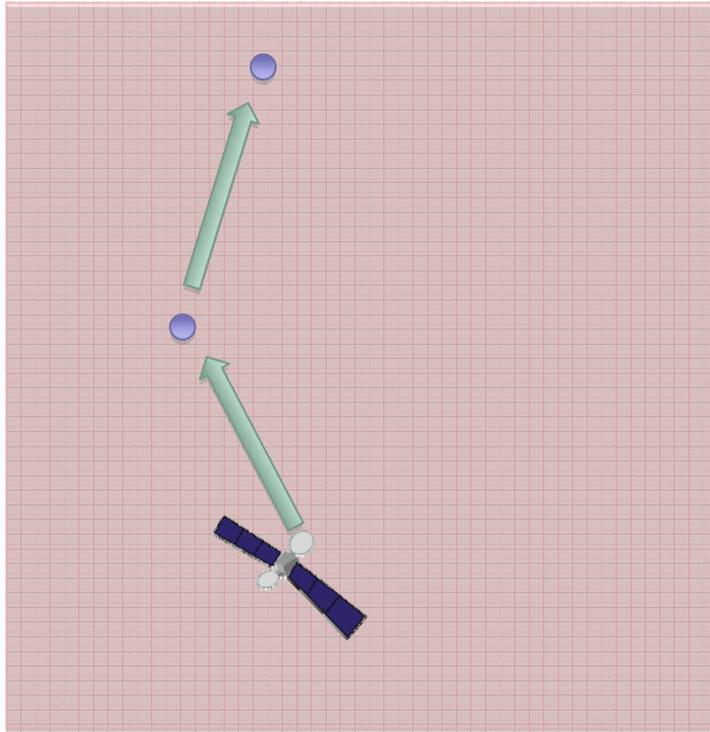
- 従来までの問題設定との相違点



- ◆従来の軌道設計で対象とする問題ではあらかじめ対象がきまっていた。
- ◆地球接近小惑星のように膨大な数の対象を観測するミッションを考えた場合、一度のフライトでできるだけ多くの観測を行うことが望ましい。

Multiple Flyby Design

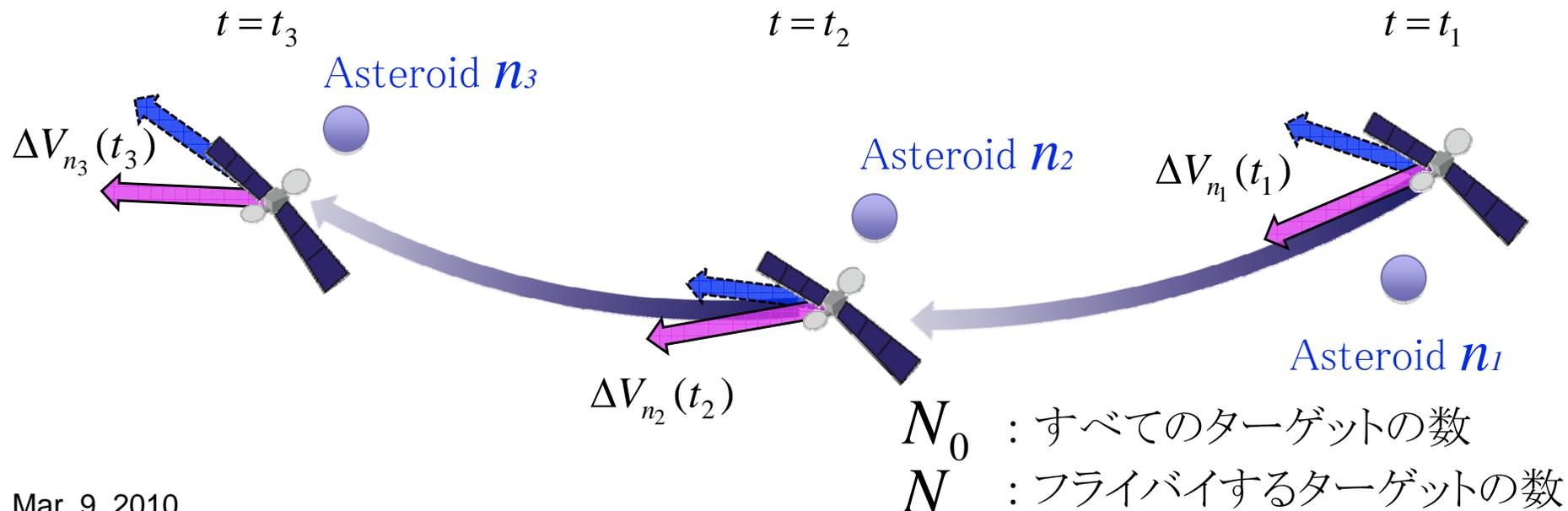
- 従来までの問題設定との相違点



- ◆フライバイごとに異なる境界条件であるため、単一のフライバイ問題を複数回解く必要がある。
- ◆膨大な数のターゲットから最適な組み合わせと順番を選ぶのは多くの計算量を必要とする。

Assumptions

- 各時刻でのターゲットの位置は正確にわかるものとする.
- ターゲットは質点としてあつかい, 衝突等は考慮しない.
- 各軌道移行は一度のインパルスで行うものとする.
- インパルスにより瞬時に速度ベクトルが変化するものとする.
- 最終目的地へ行くための速度変化は考慮しない.
- 特定のターゲットを優先して選ぶ必要はないものとする.
- 関心のある領域内に, 十分多くのターゲットが存在するものとする.



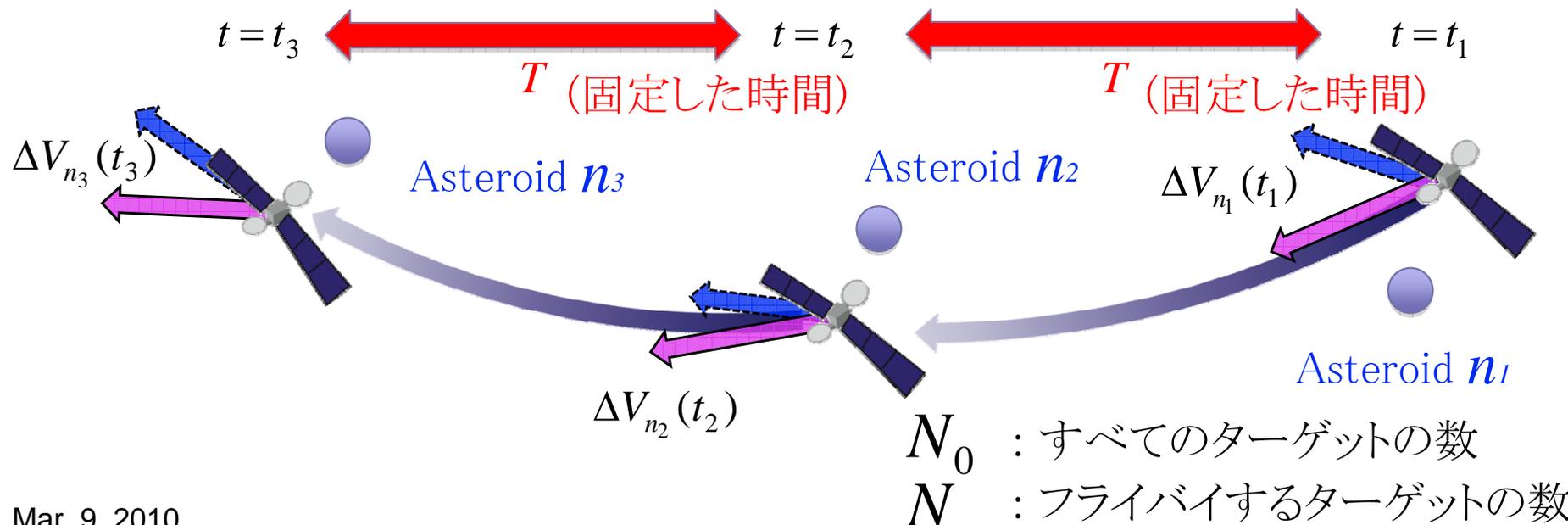
Problem Statement

- 時刻 t_0 に $r(t_0)$ を $v(t_0)$ で出発した宇宙機が N_0 個の位置が既知のターゲットのうち N 個のターゲットに固定した時間間隔 T でフライバイを行うとする。

総速度変化量:

$$\Delta V = \sum |\Delta V_{n_i}(t_i)| = \sum |v_{n_i}(t_{i+1}) - v_{n_i}(t_i)|$$

- を最小とするターゲットの組み合わせと各フライバイ時に必要な速度変化量を求めよ。



Multiple Flyby Design

- Analytical expression for total velocity change ΔV

$$F_1 \text{ generating function: } F_1(q_f, q, T)$$

$$\text{Initial and final velocity: } v_0 = \frac{\partial F_1}{\partial q}(q_f, q_0, T)$$

$$v_f = \frac{\partial F_1}{\partial q_f}(q_f, q_0, T)$$

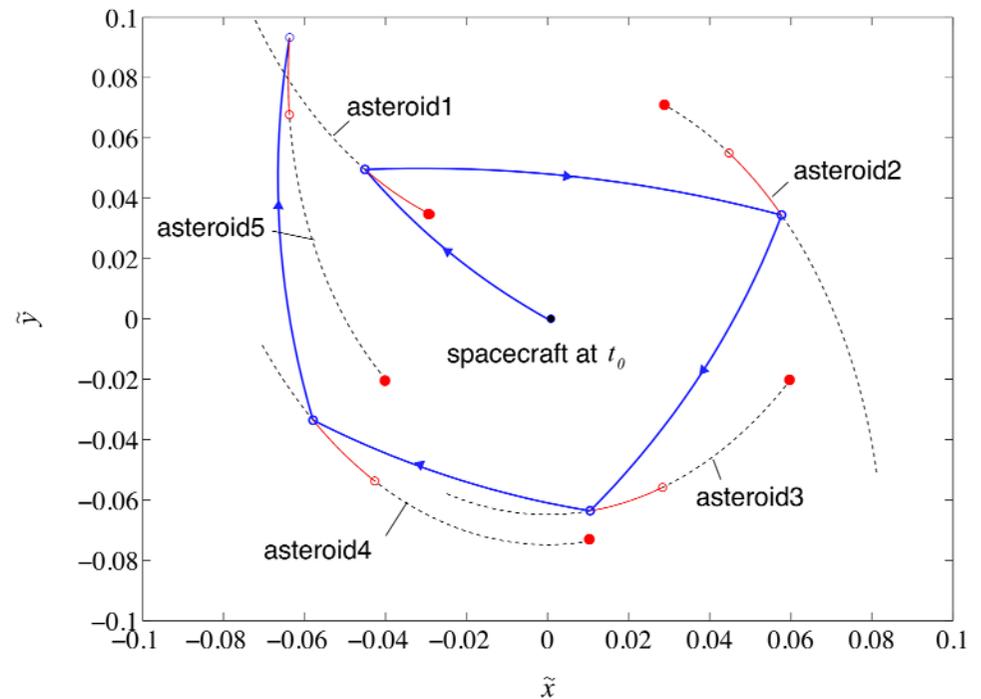
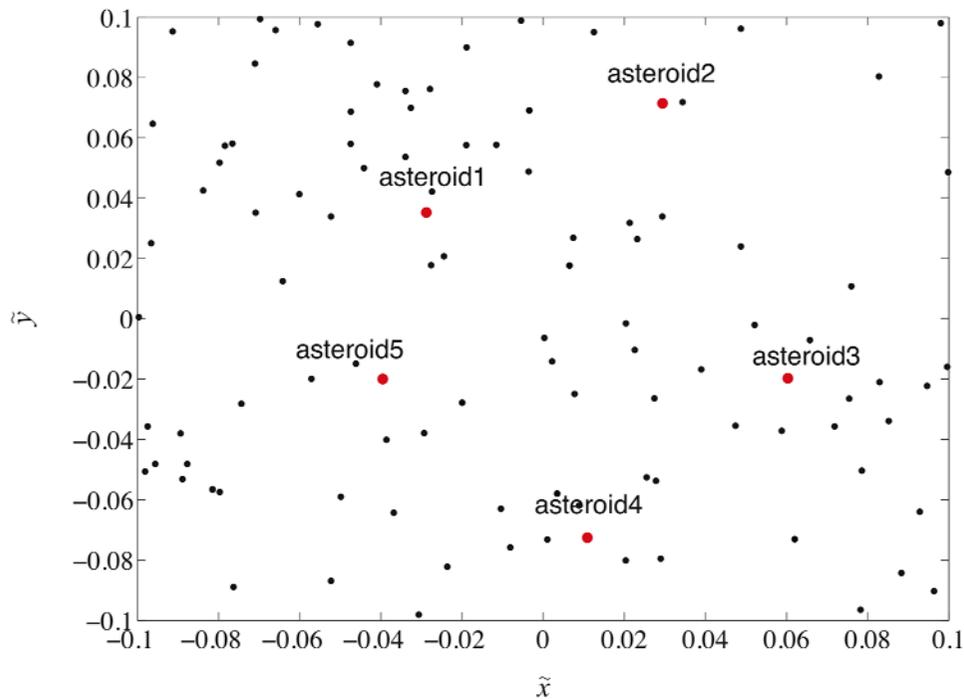
$$\text{Total velocity: } \Delta V = \sum |\Delta V_{n_i}(t_i)| = \sum |v_{n_i}(t_{i+1}) - v_{n_i}(t_i)|$$

母関数を用いることにより、必要な速度変化量は、フライバイの時刻での位置の関数として表される。

一度、母関数 $F_1(q_f, q, T)$ をつけておけば、すべての組み合わせで必要な速度量が直ちに計算できる。

Simulation Results

- 地球近傍の軌道をもつ仮想的な100個の小惑星に対してアルゴリズムをテスト

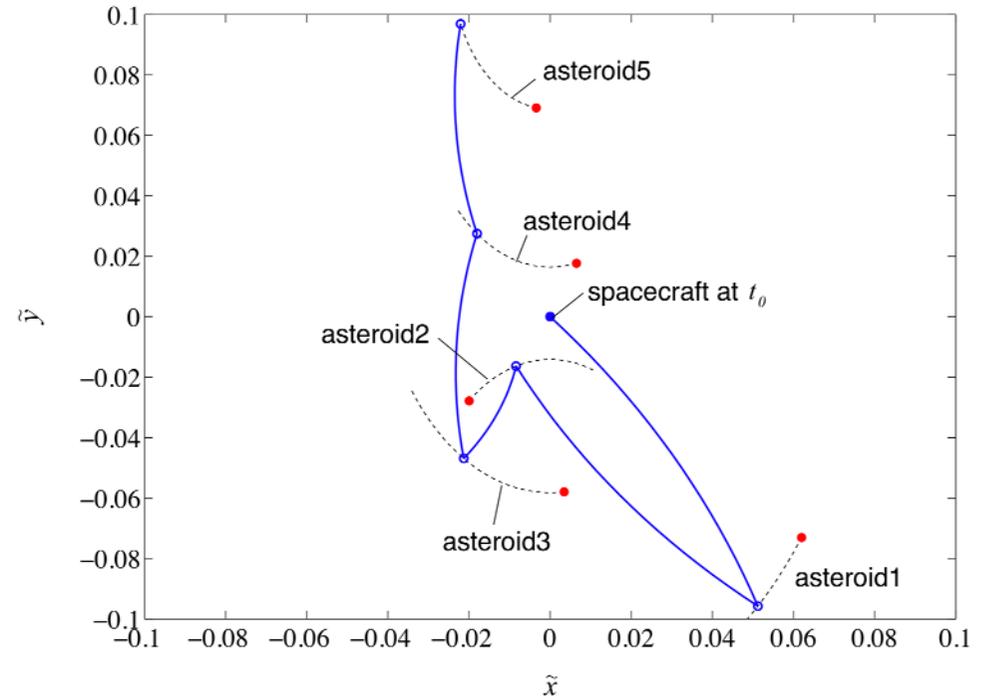
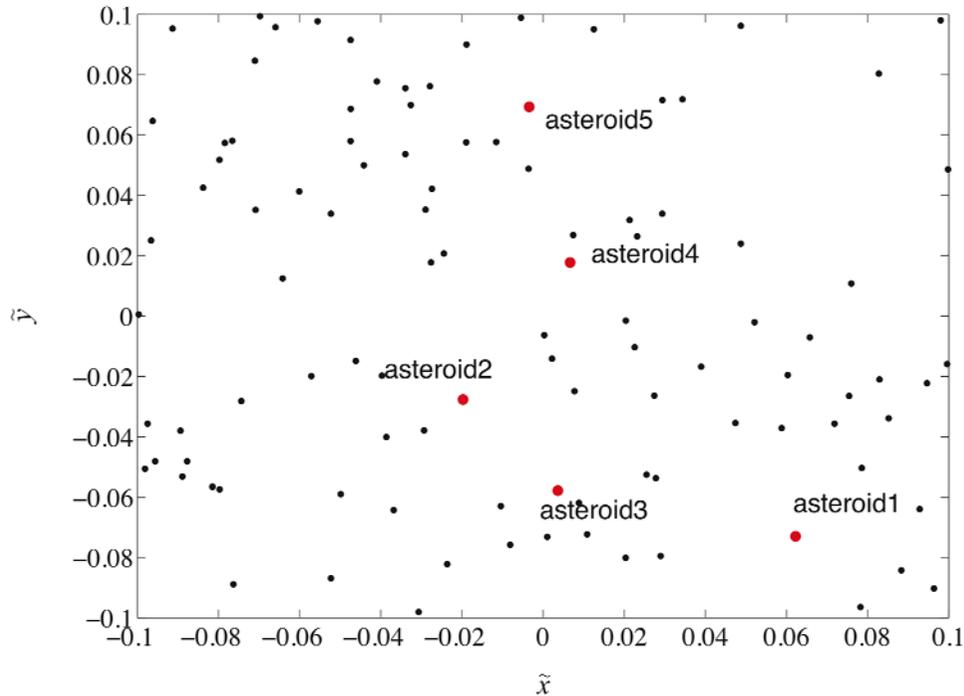


An example of multiple flyby

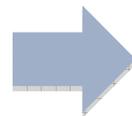
ひとつの母関数により、複数フライバイを行うことに成功。

Simulation Results

- Optimal sequence



100 asteroids



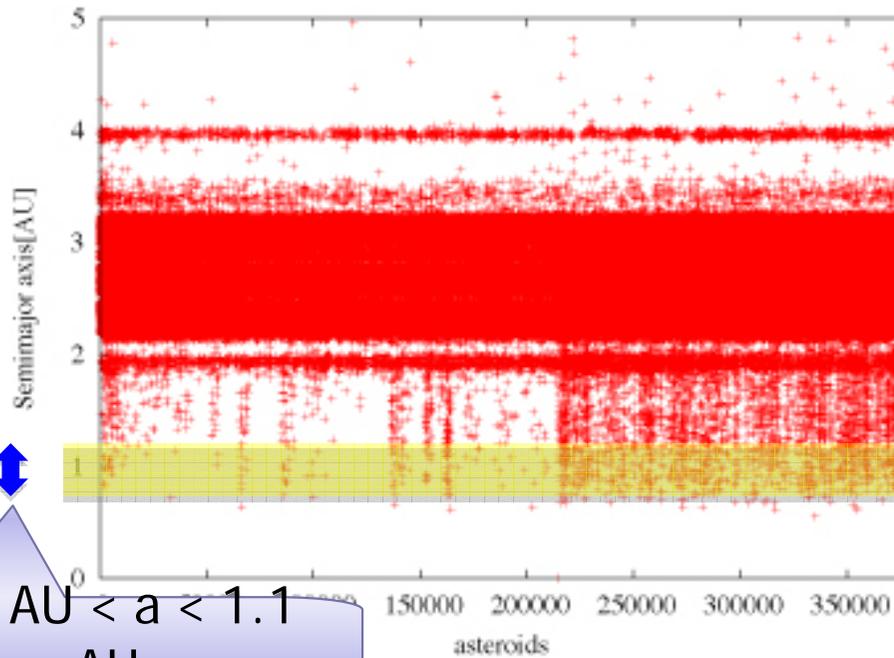
9,034,502,400 possibilities

Selection of 5 asteroids

90億通りの組み合わせの中から最適な複数フライバイ軌道を決定。

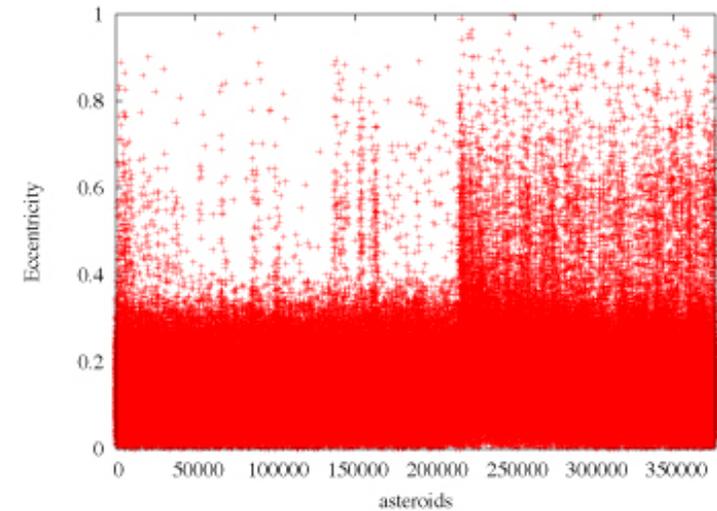
Data of Asteroids

- The MPC Orbit (MPCORB) Database (June 8, 2009)

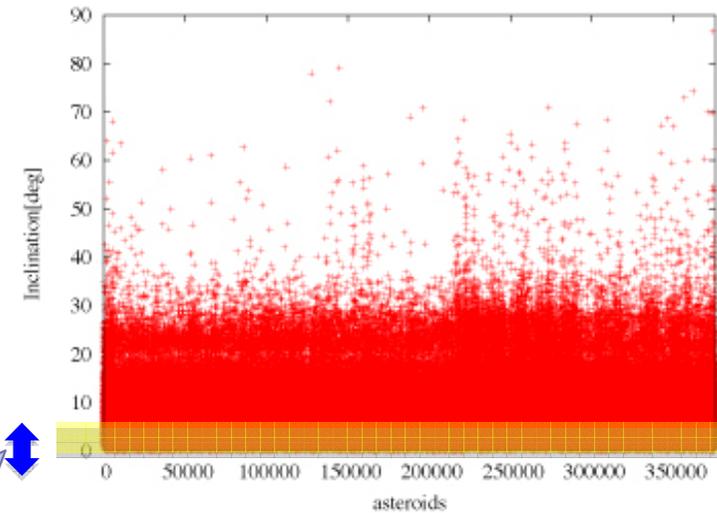


$0.9 \text{ AU} < a < 1.1 \text{ AU}$

長半徑



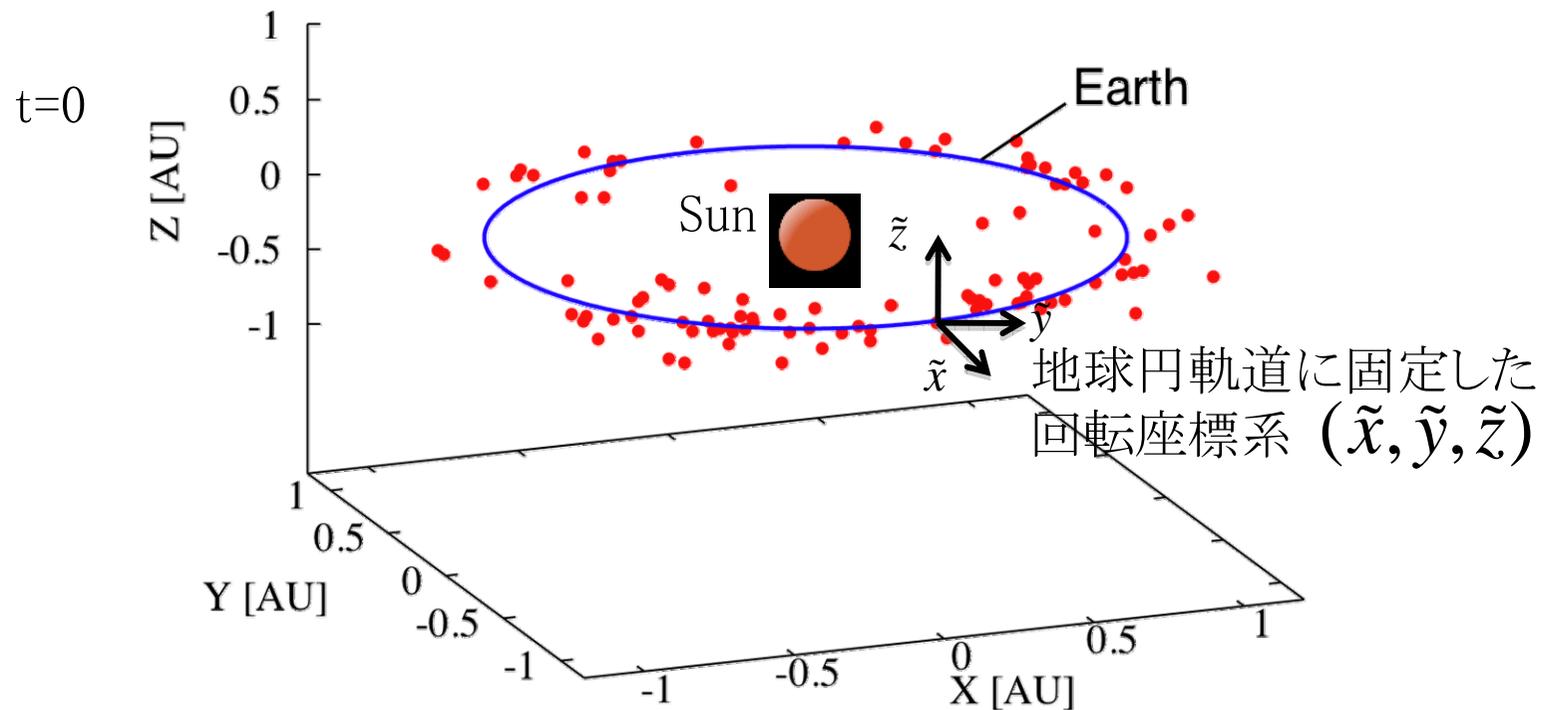
離心率



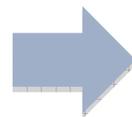
$0 < i < 5.0 \text{ [deg]}$ 軌道傾斜角

Data of Asteroids

- The MPC Orbit (MPCORB) Database
(June 8, 2009)



113 asteroids

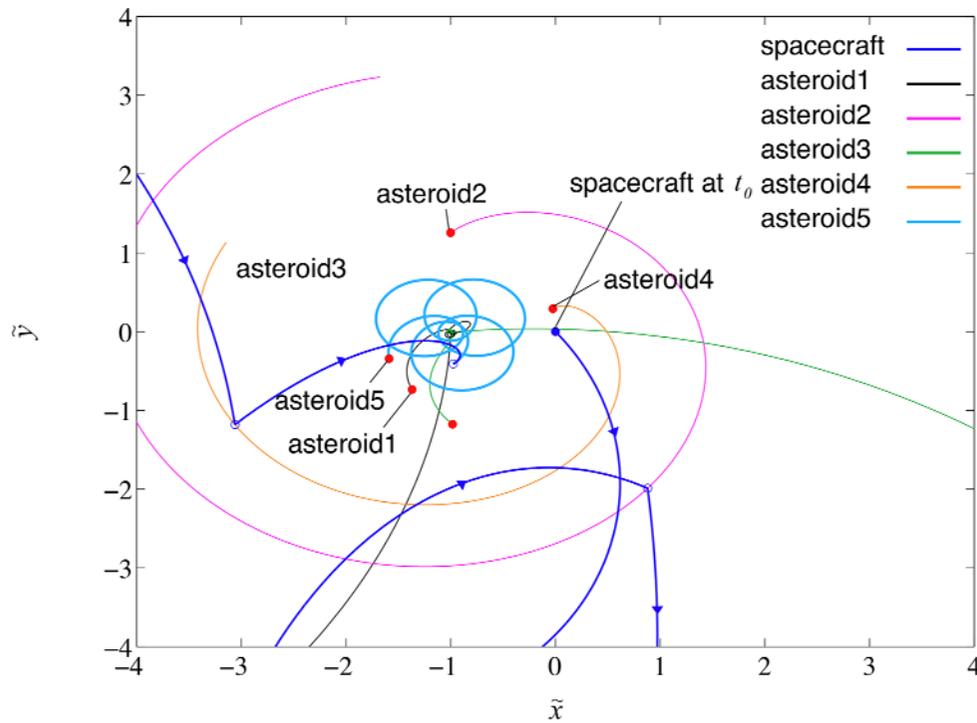


16,843,743,840 possibilities

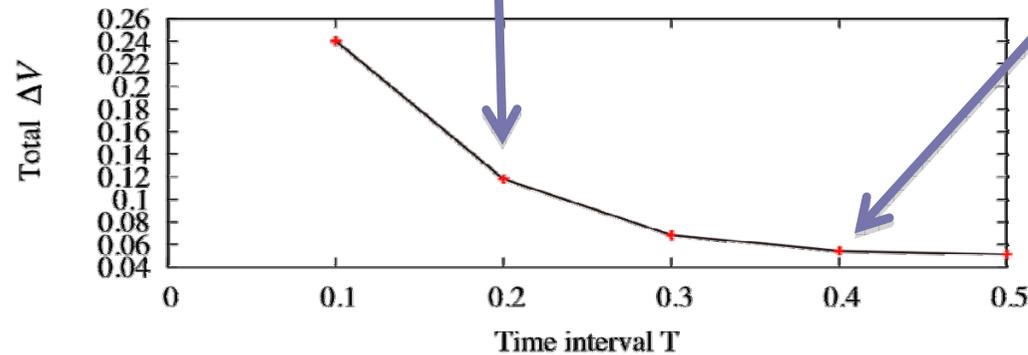
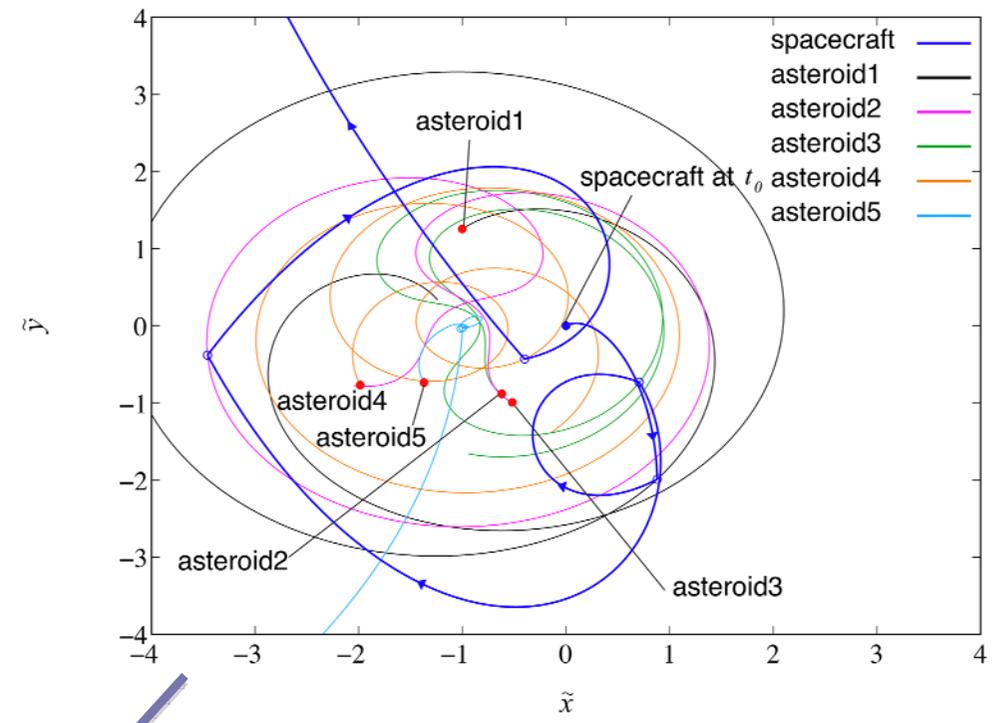
5つの小惑星を観測する場合

Optimal Multiple Flyby

- 1年で5回フライバイ(5T=2year)



- 2年で5回フライバイ(5T=2year)



- 実際には、問題に応じて時間間隔 T を適切に設定する必要がある。

Conclusions

- 運動の母関数を用いた新たな軌道理論の解法を提案した.
- 膨大な数の対象から, 少ない燃料消費で複数フライバイを達成するためにどのターゲットにいつフライバイするのがよいのか決定するための設計方法を提案した.
- 応用例
 - Low-Thrust
 - Formation flight
 - Space situational awareness

Mai Bando and Hiroshi Yamakawa, "A New Optimal Orbit Control for Two-Point Boundary-Value Problem Using Generating Functions", *Advances in the Astronautical Sciences*, Vol. 134, pp. 245-260, (2009).

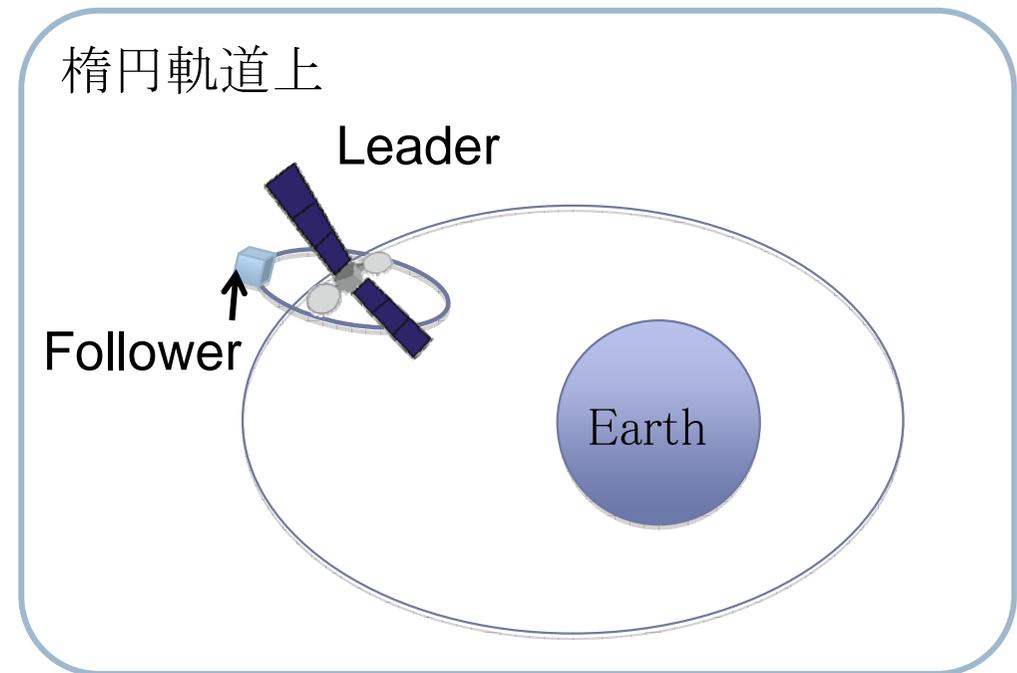
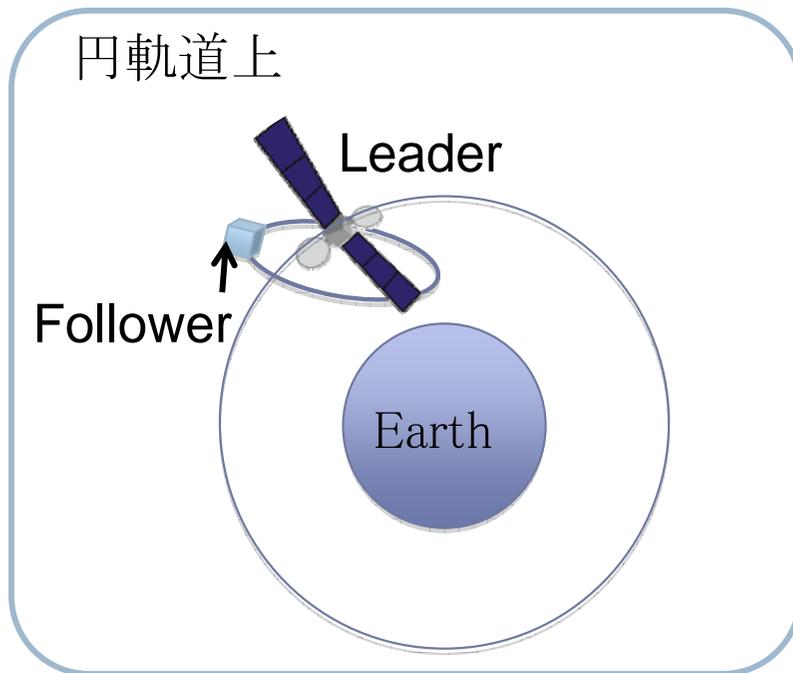
Mai Bando and Hiroshi Yamakawa, "Orbital Design for Multiple Flyby Mission," 27th International Symposium on Space Technology and Science, Tsukuba, 7-2009.

Mai Bando and Hiroshi Yamakawa, "A New Lambert Algorithm Using the Hamilton-Jacobi-Bellman Equations," *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, (accepted).

1. スペースデブリ・地球接近小惑星探査に関する多数回ランデヴーのための軌道計画
 2. 燃料消費の少ないフォーメーションフライトや軌道間遷移に関する基礎理論
-

はじめに

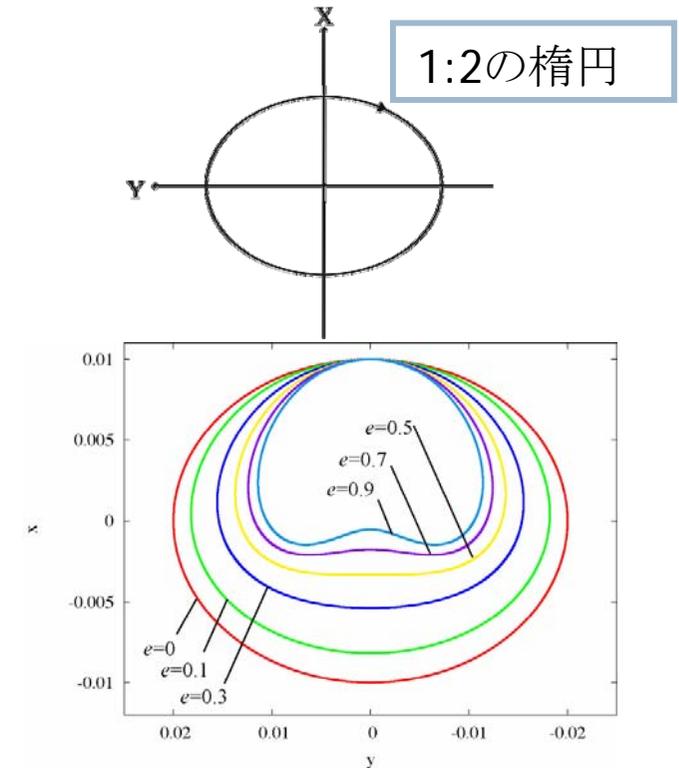
- フォーメーションフライト
 - 近年、軌道上サービスや高精度の科学観測を目的として、複数の宇宙機が相互の位置などの決められた条件を保ったまま周回軌道を航行するフォーメーションフライトの研究が注目を集めている。



Leader-follower formation flight

はじめに

- 円軌道上のフォーメーションフライト
 - Hill-Clohessy-Wiltshire方程式 (HCW方程式)
 - 線形時不変システム
 - 周期解の条件 $\dot{y}_0 = -2nx_0$
- 楕円軌道上のフォーメーションフライト
 - Tschauner-Hempel方程式 (TH方程式)
 - 線形時変システム
 - 周期解をもつ。

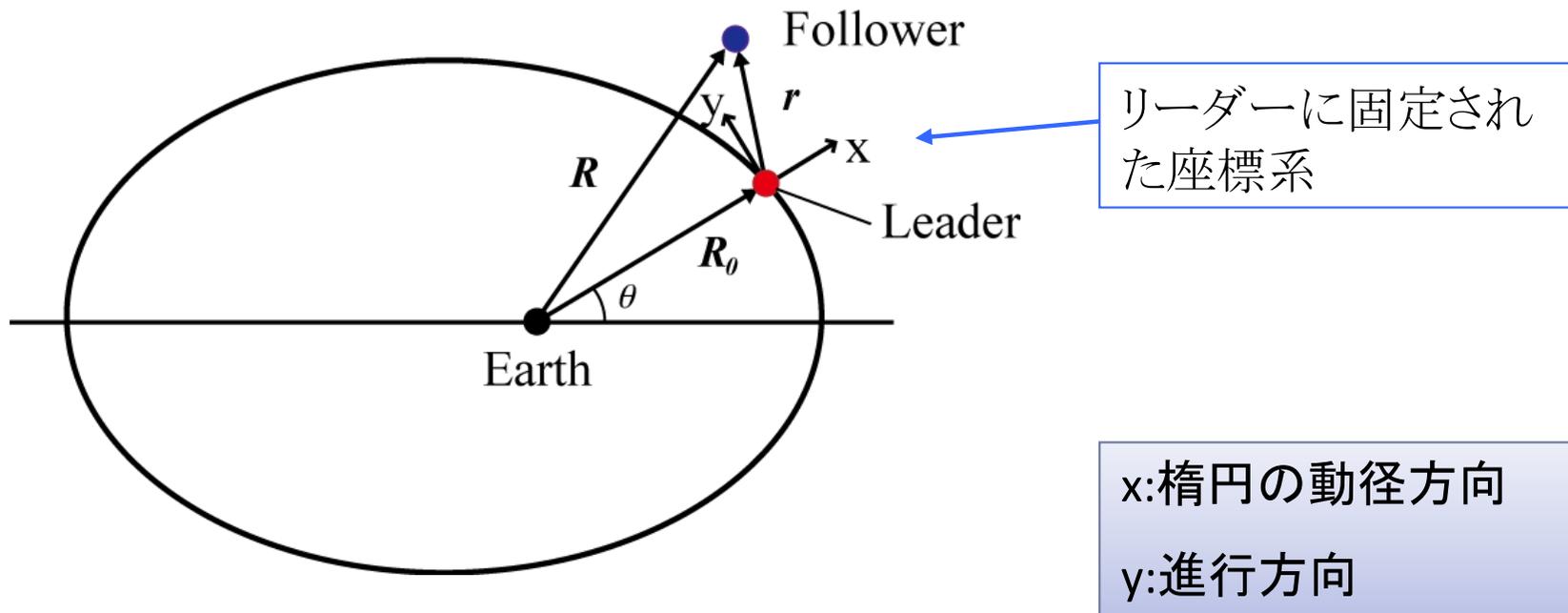


周期軌道を利用することでフライアラウンドを行うことができる

非線形方程式の周期軌道となる条件を導出し、フォーメーションフライトへの応用を考える。

Hill座標系

- 地球周回軌道を回っている宇宙機(Leader)からのfollowerの相対運動について考える.



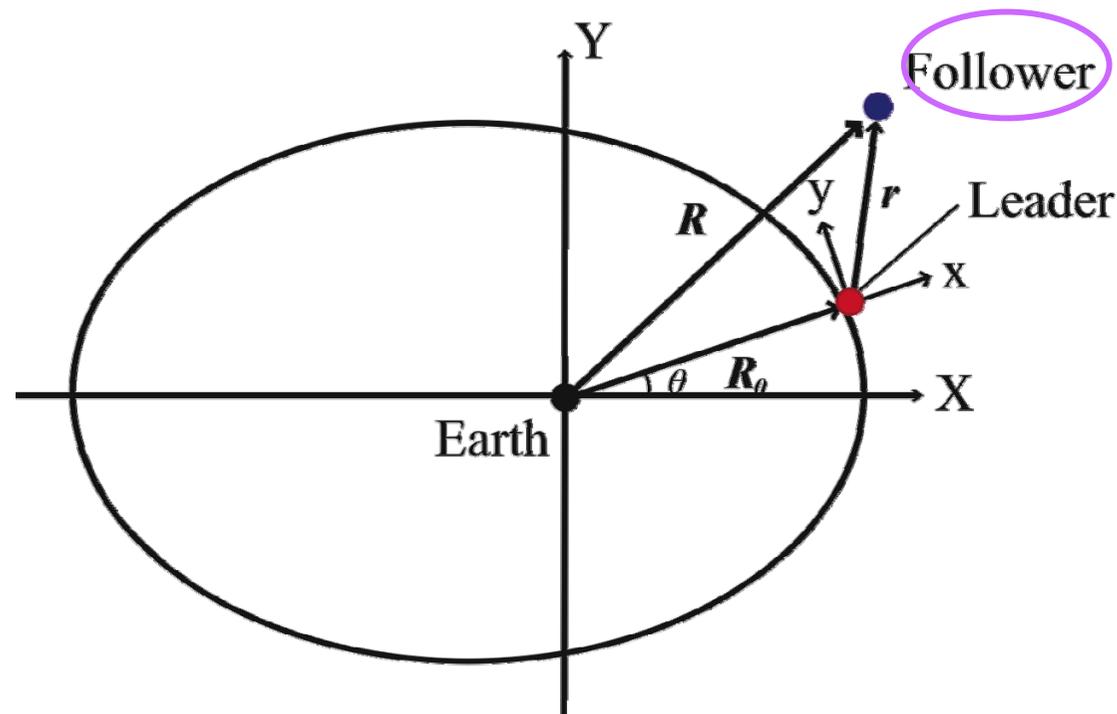
Followerの運動方程式

- 相対運動の方程式(非線形)

$$\ddot{x} - 2\dot{\theta}\dot{y} - \ddot{\theta}y - \dot{\theta}^2x - \frac{\mu}{R_0^2} = -\frac{\mu}{R^3}(x + R_0) + u_x,$$

$$\ddot{y} + 2\dot{\theta}\dot{x} + \ddot{\theta}x - \dot{\theta}^2y = -\frac{\mu}{R^3}y + u_y,$$

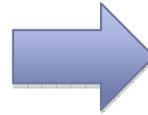
$$\ddot{z} = -\frac{\mu}{R^3}z + u_z,$$



非線形周期軌道のための条件

- 周期解となる条件

慣性系の楕円軌道

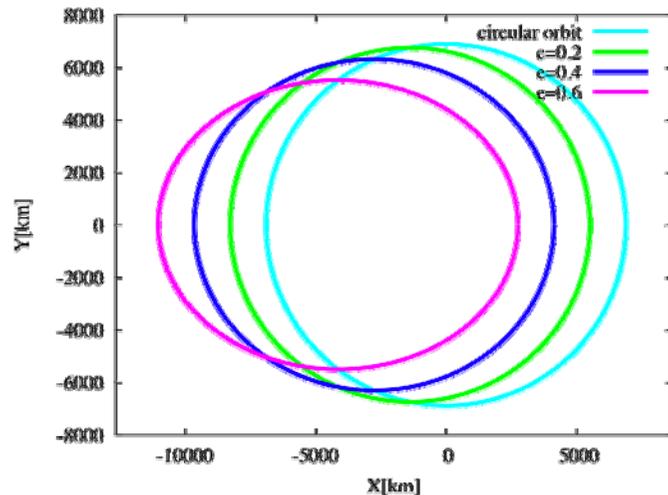


回転座標系の非線形周期軌道

軌道の周期は長半径によって決まる

$$E = -\frac{\mu_e}{2a} = -\frac{(n\mu_e)^{2/3}}{2}$$

リーダー衛星の長半径と同じ
長半径をもつ楕円



回転座標系での初期値

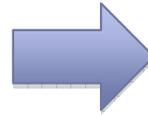
$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \mathbf{R}(t) - \mathbf{R}_0(t) \\ &= \begin{bmatrix} R(t) \cos \theta(t) - R_0 \cos nt \\ R(t) \sin \theta(t) - R_0 \sin nt \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathbf{r}(t)}{\delta t} &= \dot{\mathbf{R}}(t) - \dot{\mathbf{R}}_0(t) - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}(t) \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{nR_0}{\sqrt{1-e^2}} \sin \theta(t) + nR(t) \sin \theta(t) \\ \frac{nR_0}{\sqrt{1-e^2}} (\cos \theta(t) + e) - nR(t) \cos \theta(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

非線形周期軌道を決めるパラメータ

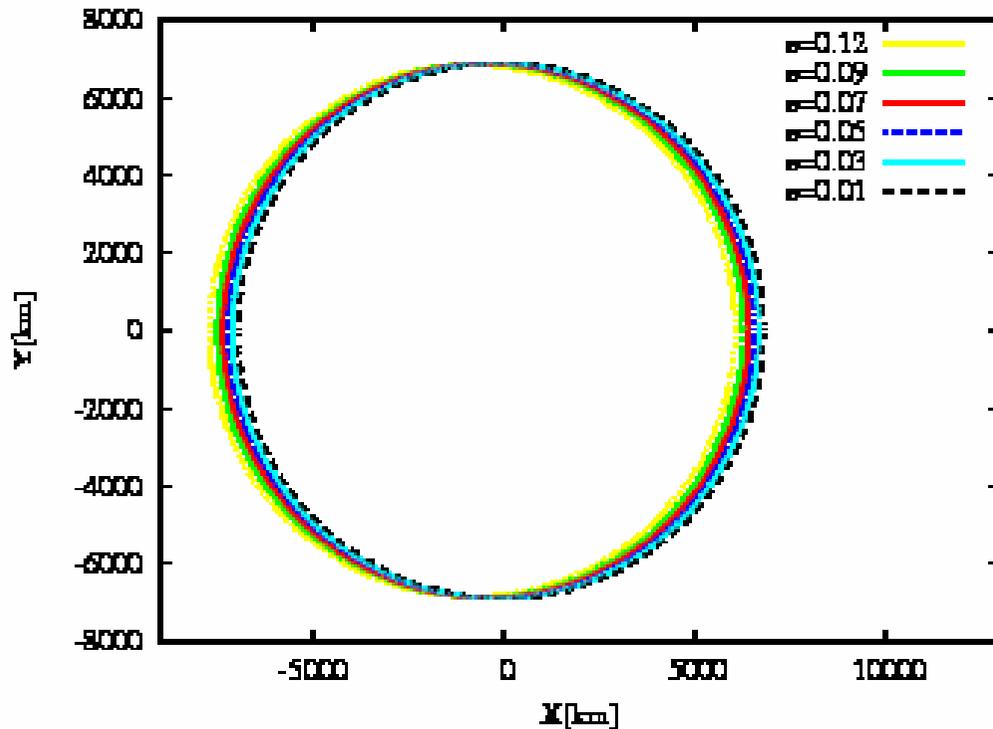
- 周期解となる条件

慣性系の楕円軌道

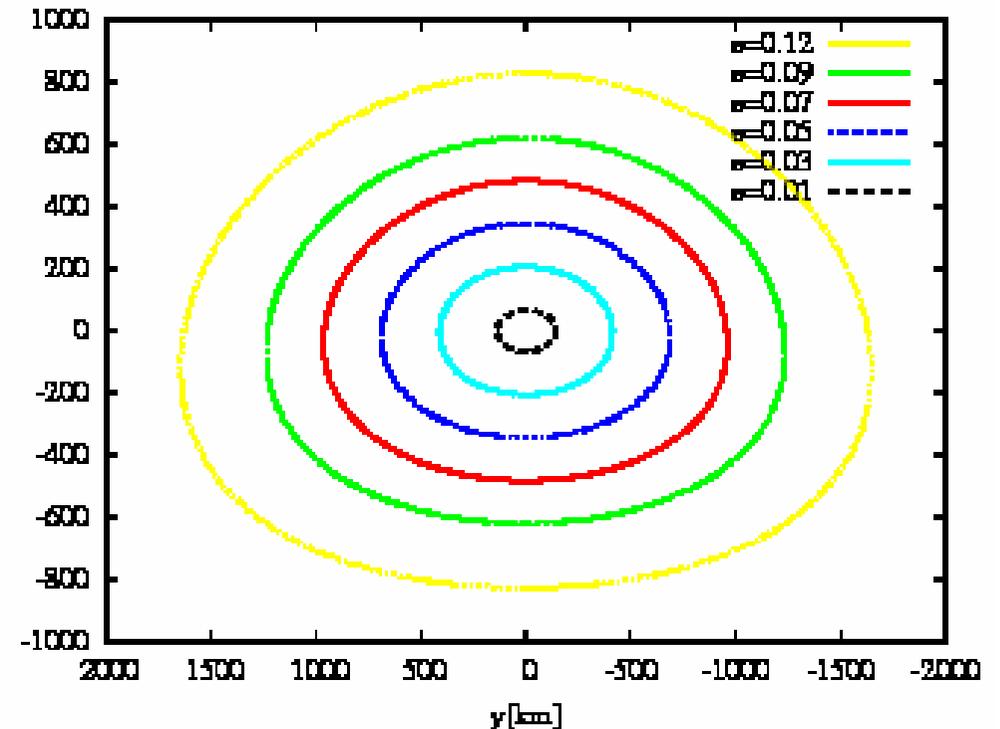


回転座標系の非線形周期軌道

離心率 相対軌道の大きさ(形状)を決める。



慣性系

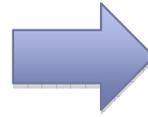


回転座標系

非線形周期軌道を決めるパラメータ

- 周期解となる条件

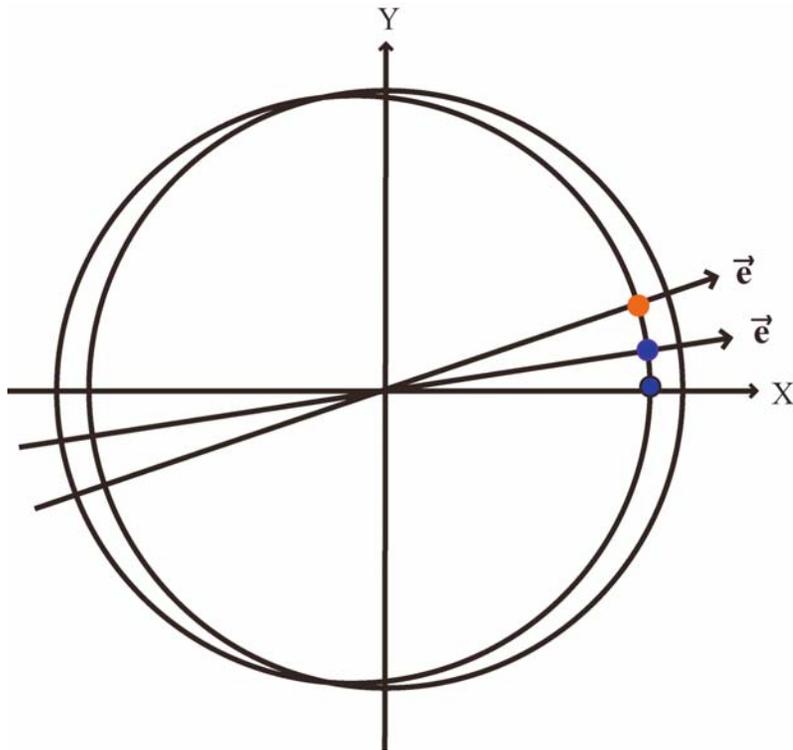
慣性系の楕円軌道



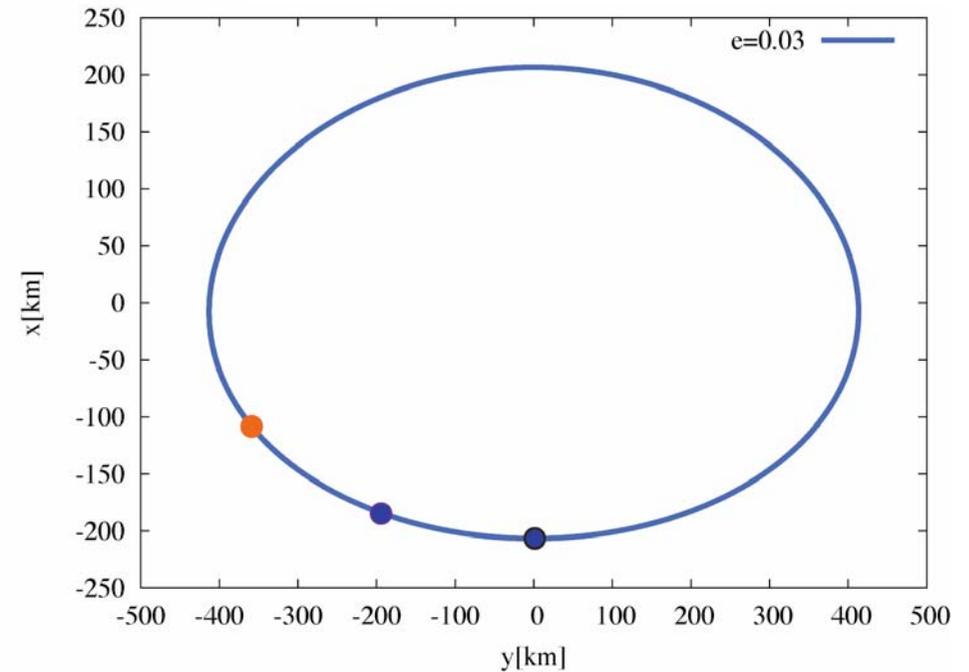
回転座標系の非線形周期軌道

離心ベクトルの向き

相対軌道上での位置を決める。



慣性系

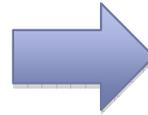


回転座標系

非線形周期軌道を決めるパラメータ

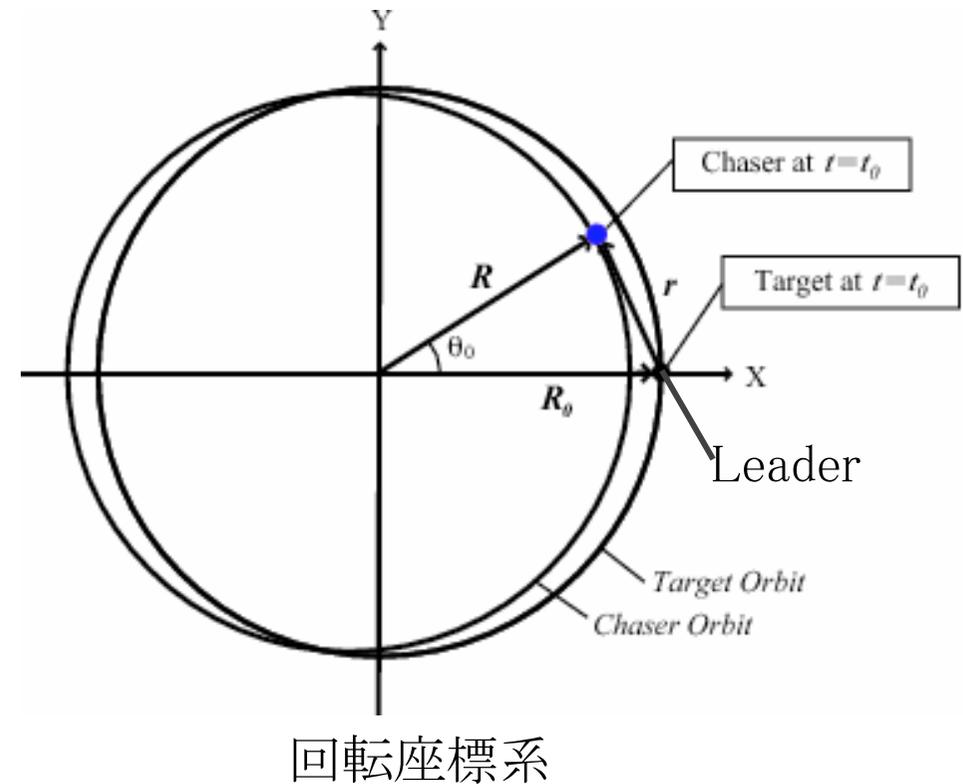
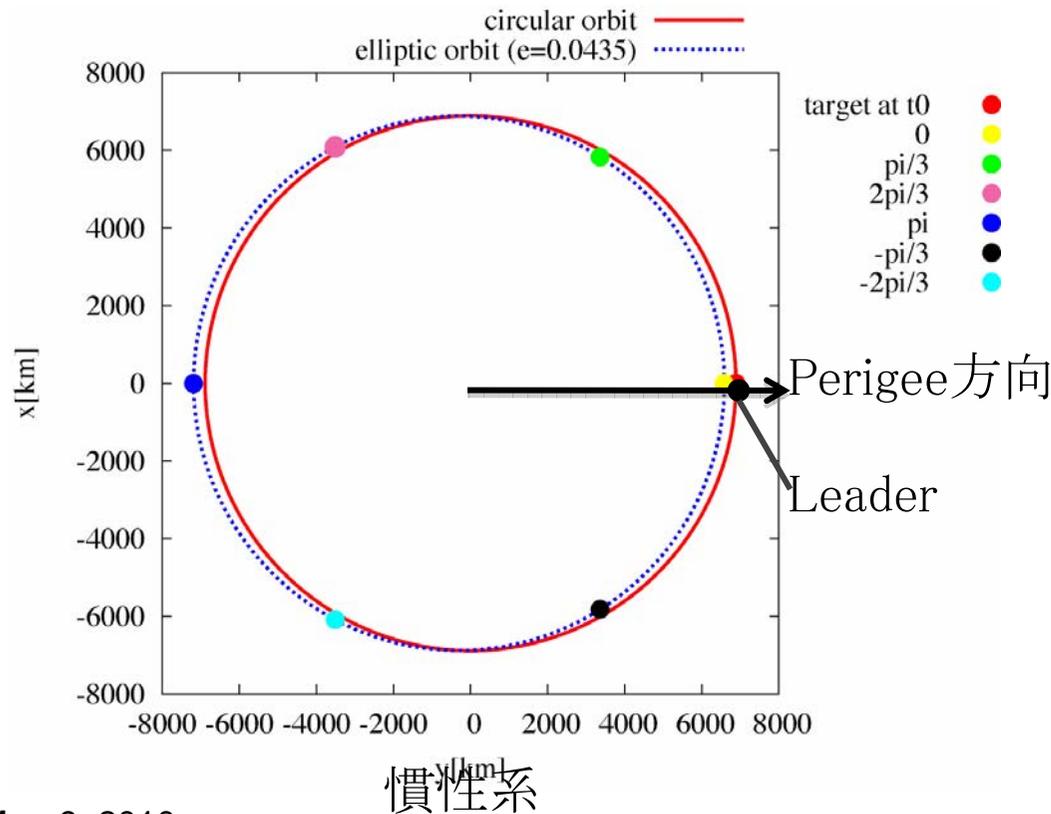
- 周期解となる条件

慣性系の楕円軌道



回転座標系の非線形周期軌道

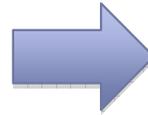
Leader衛星がPerigee方向を通過した時刻で位置 相対軌道の位置を決める。



非線形周期軌道を決めるパラメータ

- 周期解となる条件

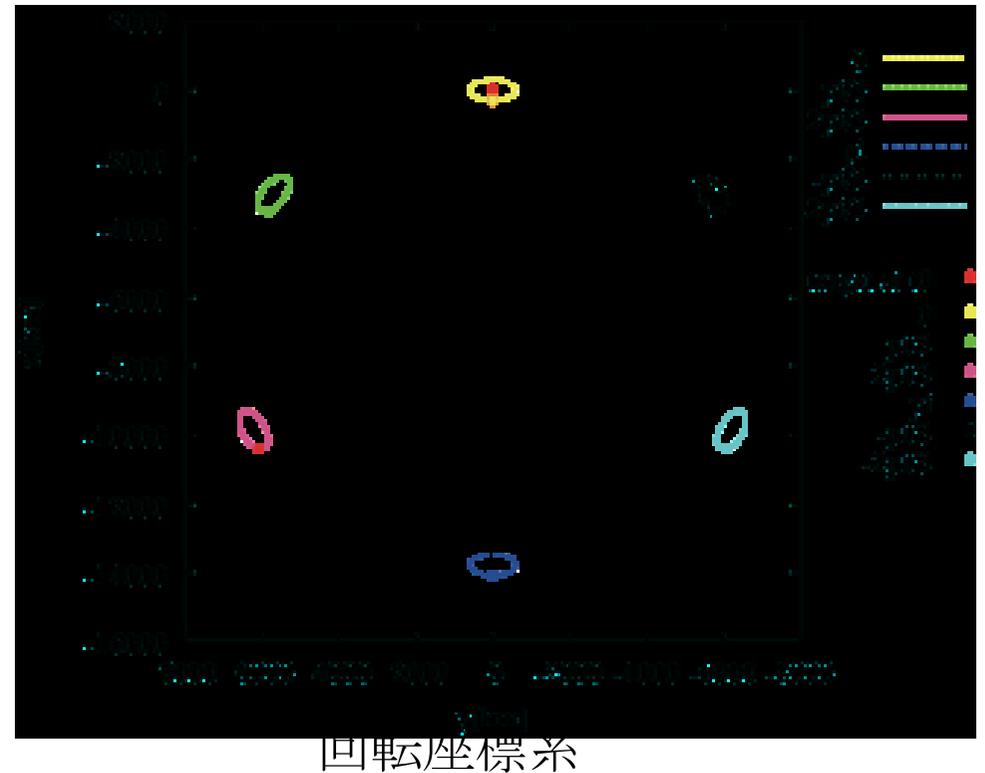
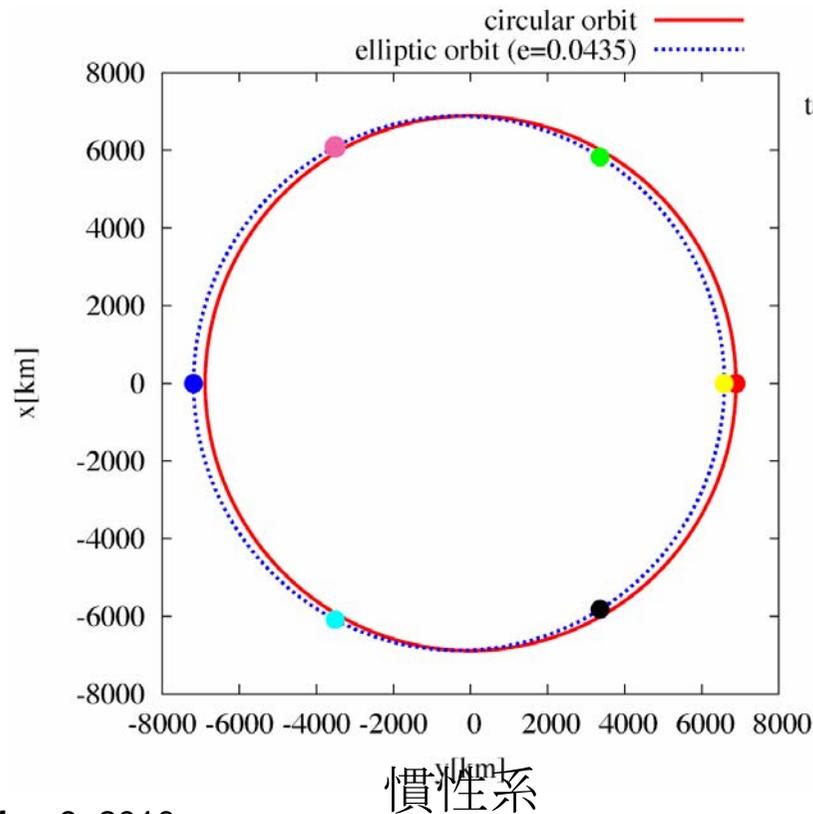
慣性系の楕円軌道



回転座標系の非線形周期軌道

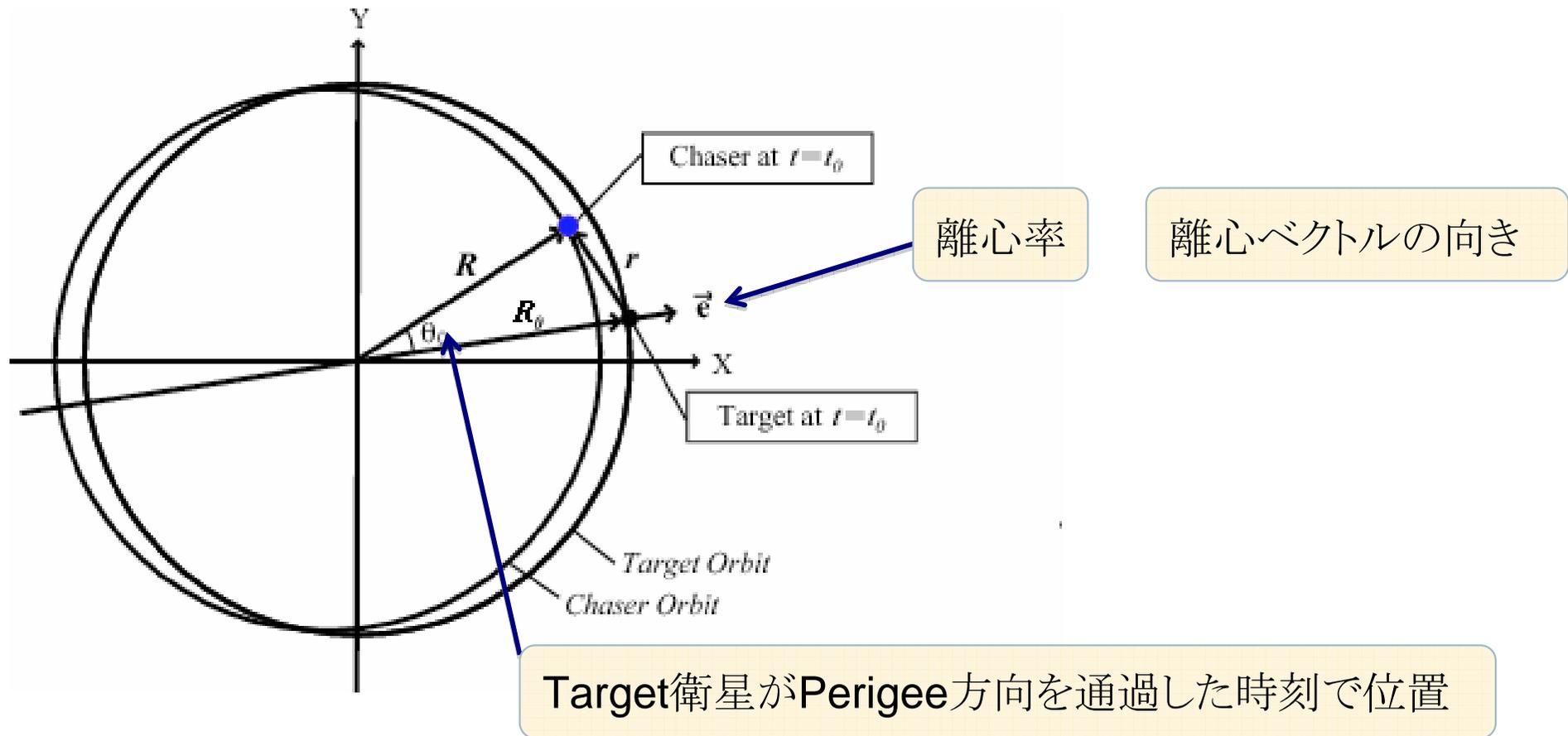
Target衛星がPerigee方向を通過した時刻で位置

相対軌道の位置を決める。



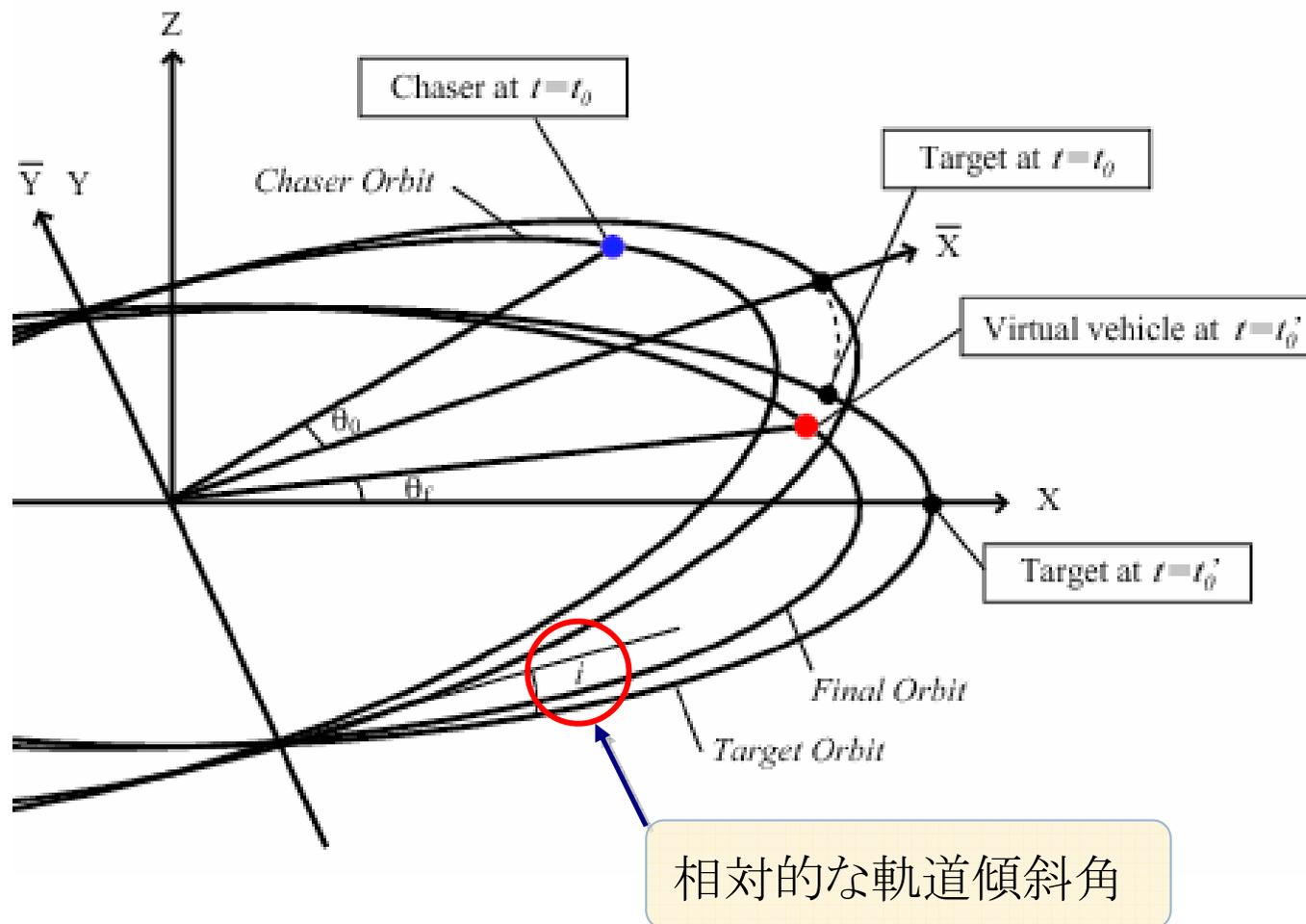
非線形周期軌道を決めるパラメータ

- 非線形周期軌道を決めるパラメータ



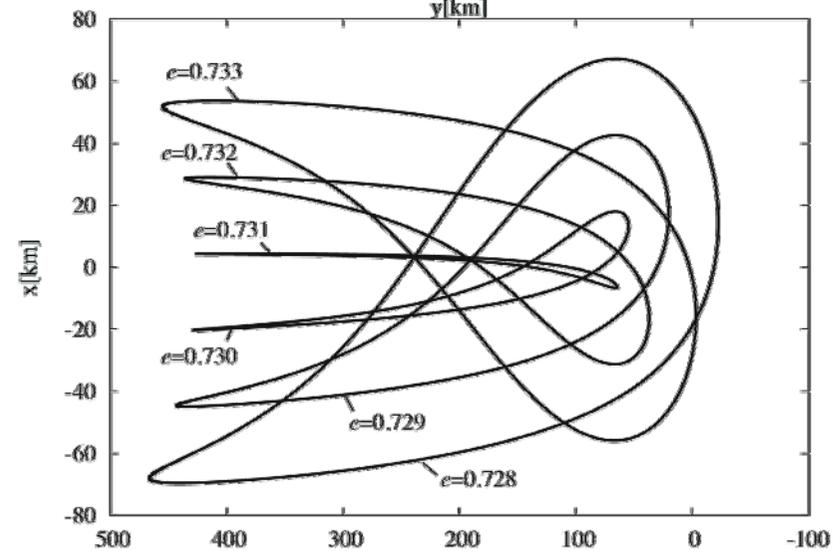
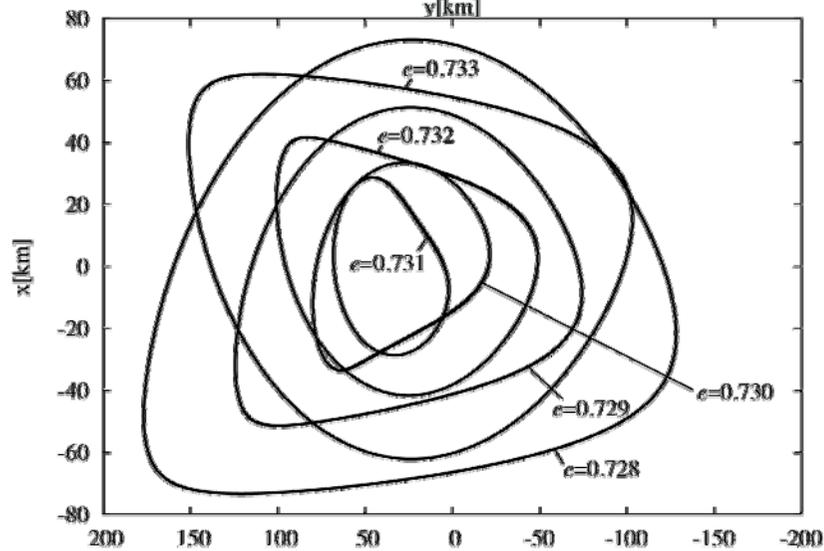
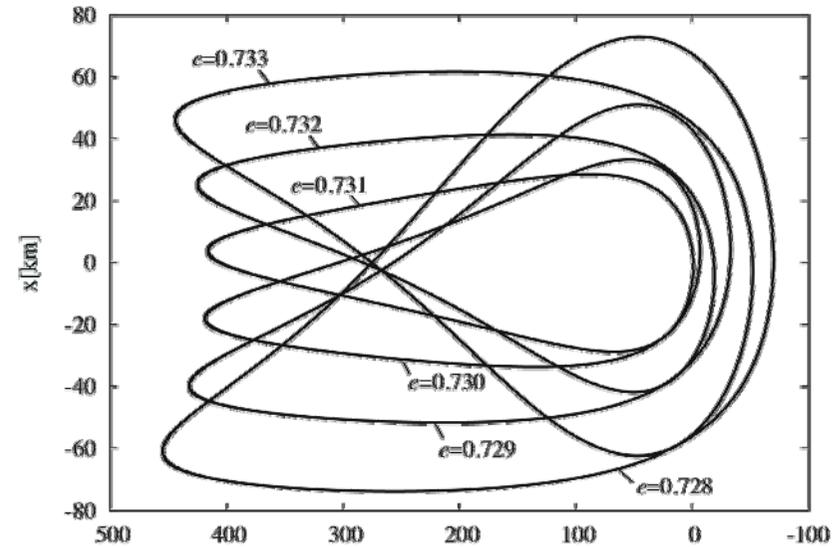
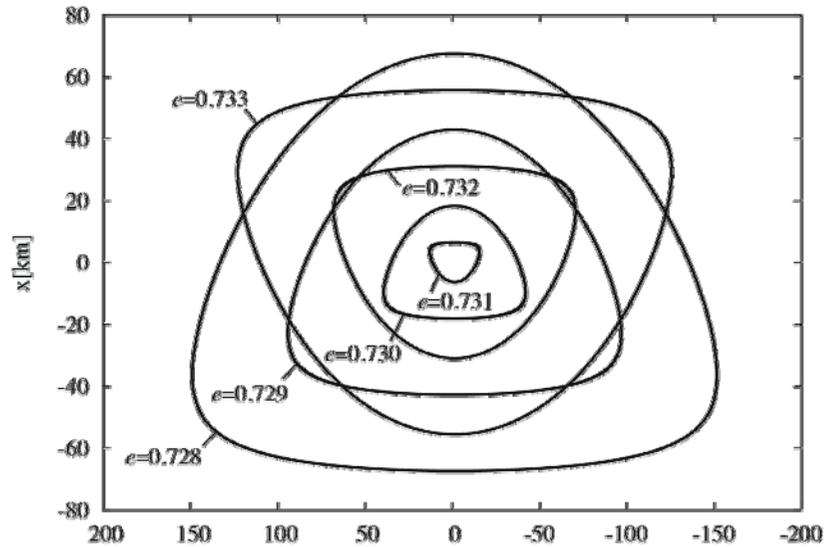
面外運動を含めた非線形周期軌道

- 3次元の場合には、軌道面での3つのパラメータに加え、相対的な軌道傾斜角がパラメータとなる。



楕円軌道上の非線形周期軌道

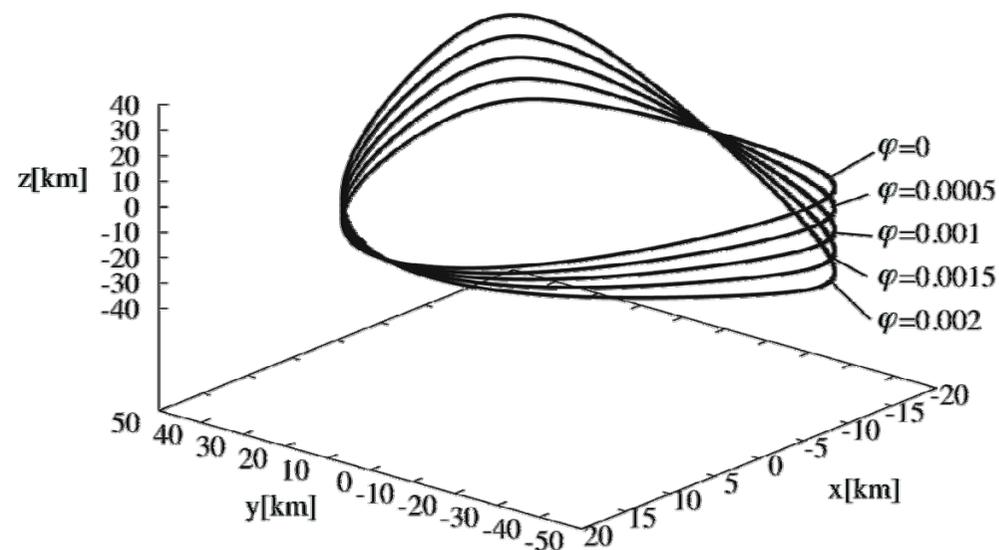
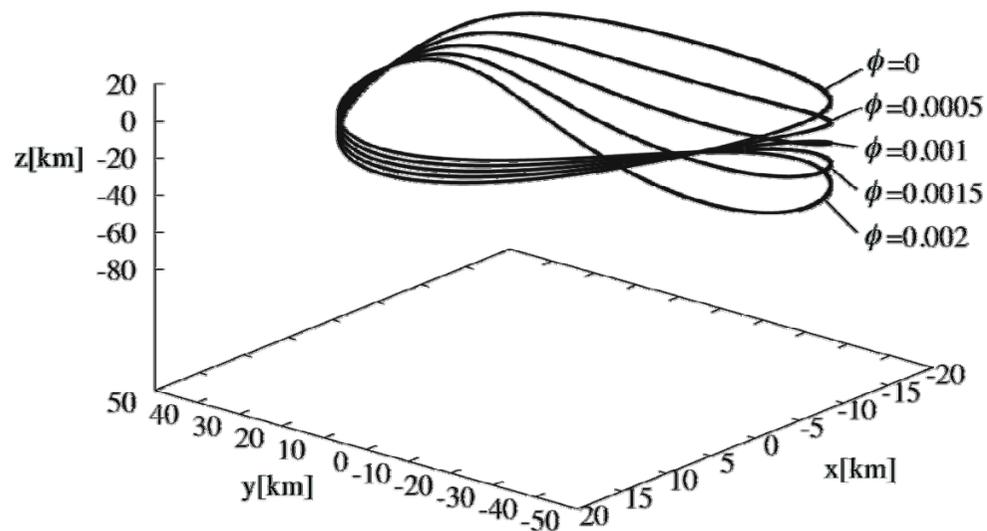
- 楕円軌道上のはリーダー衛星に対する周期軌道



回転座標系でみた非線形周期軌道の例

楕円軌道上の非線形周期軌道

- 面外運動はFollower衛星の慣性座標系での軌道の2つの軸まわりの回転で表される。



回転座標系でみた3次元非線形周期軌道の例

非線形周期軌道間の移行問題

- 周期軌道を決めるパラメータ

離心率

離心ベクトルの向き

Target衛星がPerigee方向を通過した時刻で位置

相対的な軌道傾斜角

- 周期軌道間の軌道移行問題

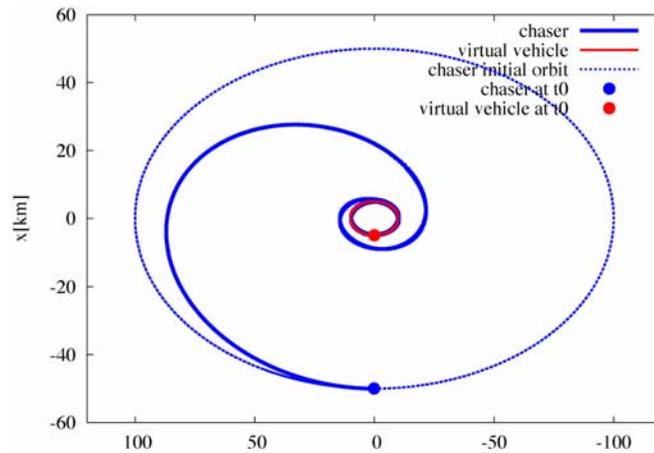
$$\boxed{e_1, \vec{e}_1, \vartheta_1, i_1} \longrightarrow \boxed{e_2, \vec{e}_2, \vartheta_2, i_2}$$

目標軌道上のVirtual Satelliteへのランデブー問題として扱う。

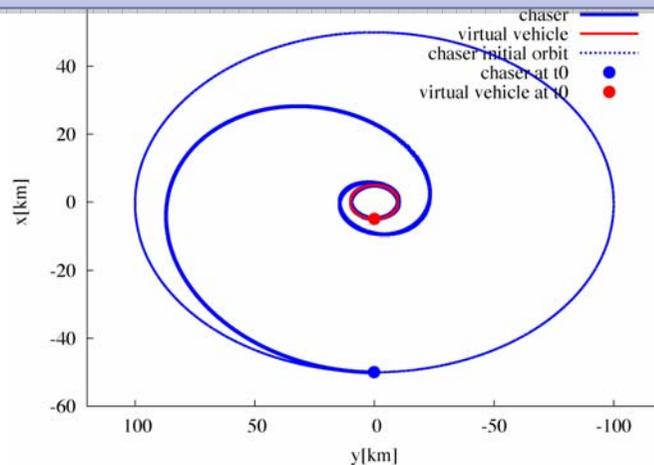
Example 1

- リーダー衛星近傍への移行問題

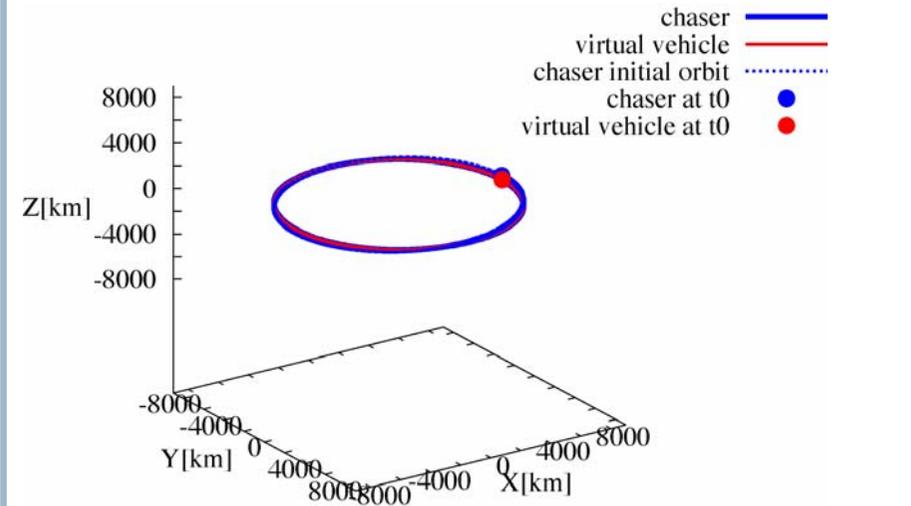
線形の周期軌道を利用した移行



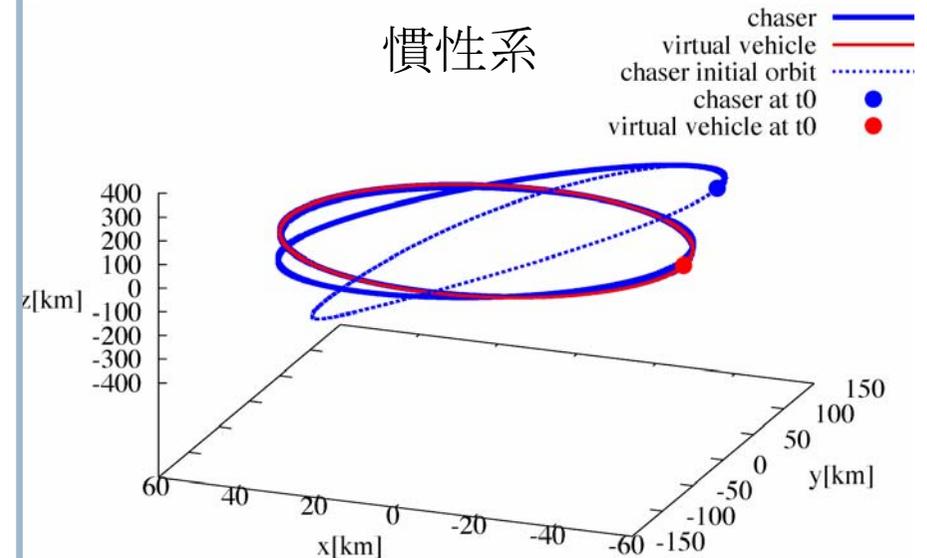
非線形の周期軌道を利用した移行



3次元周期軌道を利用した移行



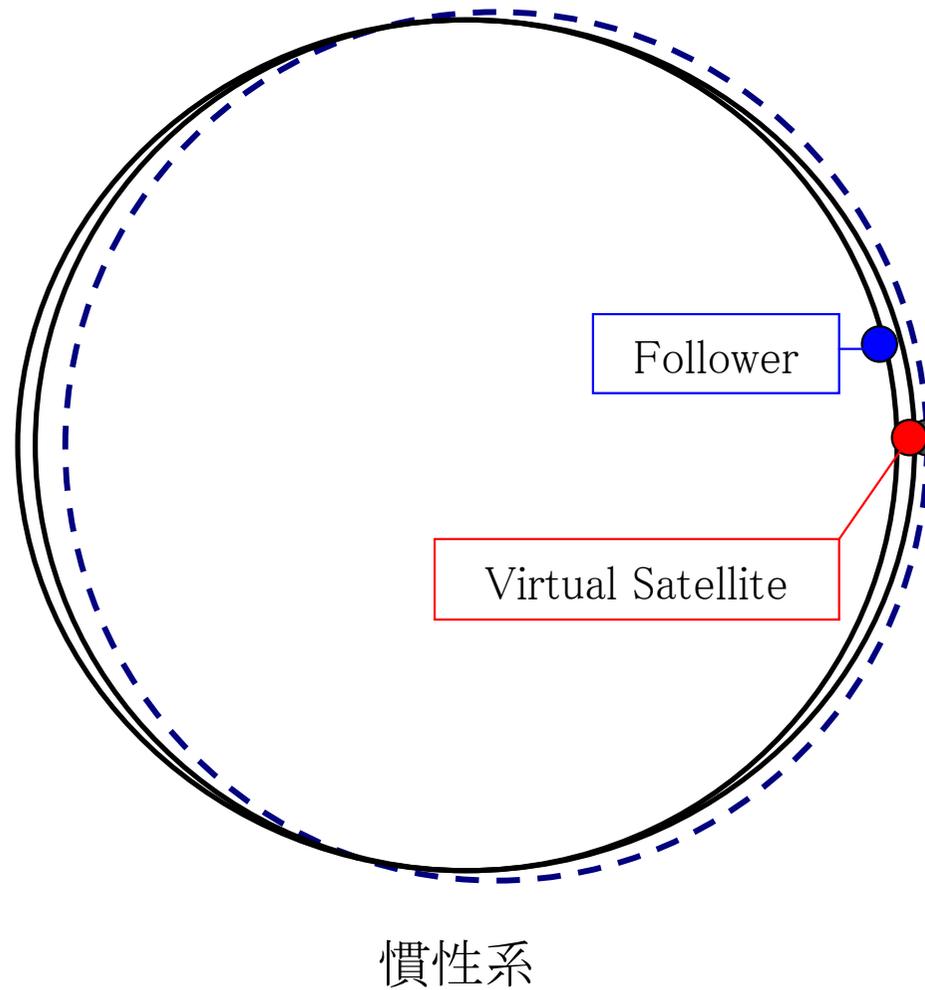
慣性系



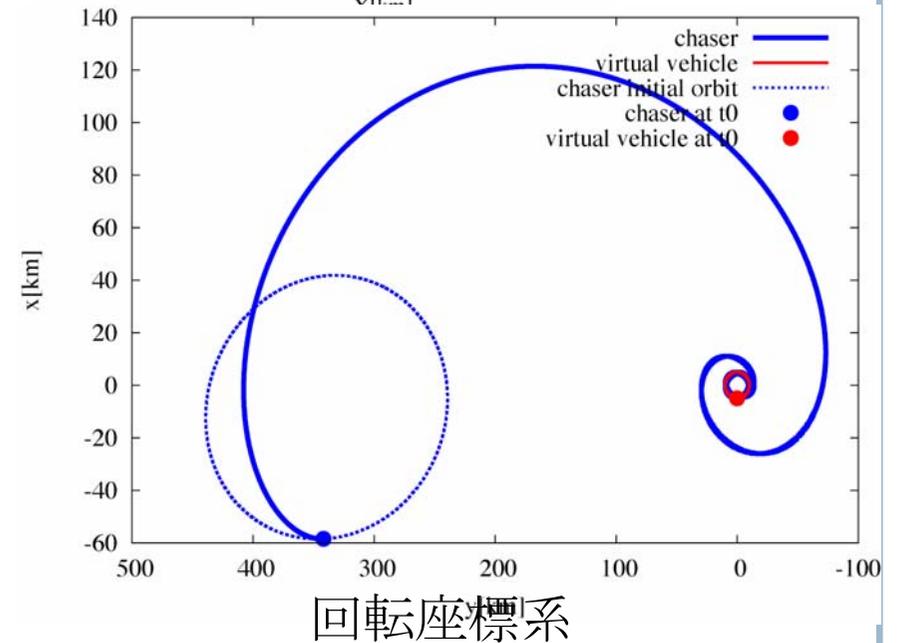
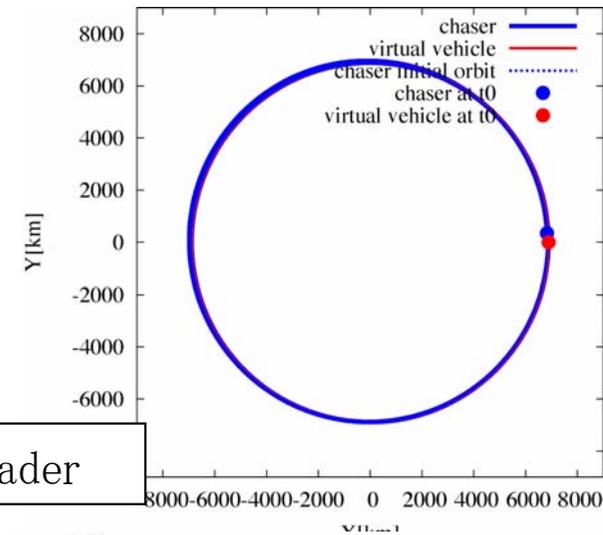
回転座標系

Example 2

- リーダー衛星への同期問題



初期時刻の異なる周期軌道を利用した移行



Conclusions

- Hill座標系での非線形方程式のすべての周期解を4つのパラメータにより生成できることを示した.
- 非線形周期軌道の初期値を近似を行うことなく完全に特徴づける方法を示した.
- 応用例
 - 非線形周期軌道間の移行問題(reconfiguration問題)
 - Initialization
 - Satellite Constellation

Mai Bando and Akira Ichikawa, “Periodic Orbits of Nonlinear Relative Dynamics and Satellite Formation,” *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 32, No. 4, pp. 1200-1208, 2009.

Mai Bando and Akira Ichikawa, “Periodic Orbits of Nonlinear Relative Dynamics along an Eccentric Orbit,” *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 33 No. 2, pp. 385--395, 2010.